Ս. ՀԱՐՈՒԹՅՈՒՆՅԱՆ

ԵՐԿՐԱՉԱՓՈՒԹՅՈՒՆ

7

ՍԱՄՎԵԼ ՀԱՐՈՒԹՅՈՒՆՅԱՆ

ԵՐԿՐԱՉԱՓՈՒԹՅՈՒՆ

Դասագիրք

7-րդ

դասարանի համար

ԵՐԵՎԱՆ
ԱՍՏՂԻԿ ԳՐԱՏՈՒՆ
2023

ՀՏԴ 373:514(075.3)
ԳՄԴ 22.15ց72
Հ 422

ԵՐԱՇԽԱՎՈՐՎԱԾ Է ՀՀ ԿՐԹՈՒԹՅԱՆ, ԳԻՏՈՒԹՅԱՆ, ՄՇԱԿՈՒՅԹԻ ԵՎ ՍՊՈՐՏԻ ՆԱԽԱՐԱՐՈՒԹՅԱՆ ԿՈՂՄԻՑ ՈՐՊԵՍ ՀԱՆՐԱԿՐԹԱԿԱՆ ԴՊՐՈՑԻ ԴԱՍԱԳԻՐՔ

Հ 422 Հարությունյան Ս.
Երկրաչափություն: 7-րդ դասարան / Ս. Հարությունյան. Եր.: Աստղիկ գրատուն, 2023.- 176 էջ:

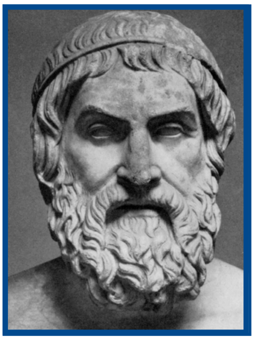
ՀՏԴ 373:514(075.3)
ԳՄԴ 22.15ց72

ISBN 978-9939-74-143-7

ՍԻՐԵԼԻ՛ ՅՈԹԵՐՈՐԴ ԴԱՍԱՐԱՆՑԻՆԵՐ,

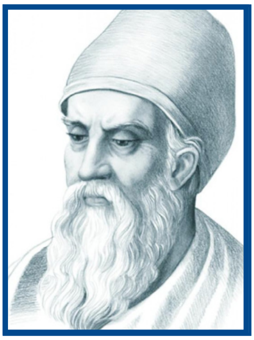
Դուք սկսում եք կանոնավոր ձևով ուսումնասիրել նոր առարկա, որի հիմքում ժամանակակից քաղաքակրթությանը հայտնի բնական գիտություններից հնագույնն է՝ երկրաչափությունը: Այն ձևավորվել է որպես գիտություն ավելի քան երկու հազարամյակ առաջ Հին Հունաստանում: Իհարկե, առաջին երկրաչափական տեղեկությունները հայտնի են եղել ավելի վաղ՝ մոտ ***3000*** *տարի առաջ, Հին Չինաստանում, Հնդկաստանում, Միջագետքում, Հին Եգիպտոսում: Սակայն եգիպտական քրմերի պապիրուսներում երկրաչափական տեղեկությունները ձևակերպված են եղել որպես առանձին, իրար հետ կապ չունեցող հրահանգներ: Այդ տեղեկությունները հավաքվել և կուտակվել են աստիճանաբար, քայլ առ քայլ, մարդկանց կենցաղային փորձի հիման վրա: Դրանք կիրառվել են ճանապարհաշինության մեջ, հողամասերի բաշխման, հսկայական բուրգերի կառուցման և աստղաբաշխական հետազոտություններ կատարելու ժամանակ: Այս օրինակները ցույց են տալիս, թե որքան բազմազան են եղել երկրաչափության կիրառությունները Հին աշխարհում: Իհարկե, հույները ծանոթացել են երկրաչափության պարզագույն փաստերին եգիպտացիներից (դա տեղի է ունեցել մեր թվարկությունից առաջ VII-V դարերում): Սակայն նրանք նոր իմաստավորում են տվել այդ տեղեկություններին և կառուցել են մի համակարգ, որը մինչ օրս ընդգրկված է դպրոցական դասընթացներում: Մեկնարկելով զուտ գործնական նշանակություն ունեցող փաստերից՝ հին հույները նկատել են դրանց ներքին տրամաբանական կապը: Հետազոտելով և զարգացնելով այն՝ նրանք ընդարձակել են երկրաչափական գիտելիքների ընդհանուր պաշարը, ապա համակարգել այն: Այստեղից էլ սկսվում է գիտությունը: Ավելի քան* ***2000*** *տարի է անցել Թալեսի, Պյութագորասի, Էվկլիդեսի, Արքիմեդի ժամանակաշրջանից: Սակայն նրանց անունները և նրանց հայտնագործությունները պահպանվել են մարդկության հավաքական հիշողության մեջ մինչ օրս:*

Այլ կերպ ասած՝ այն դասընթացը, որը դուք սկսում եք ուսումնասիրել, հայտնի է մարդկությանը շատ վաղուց: Հարյուրավոր սերունդներ

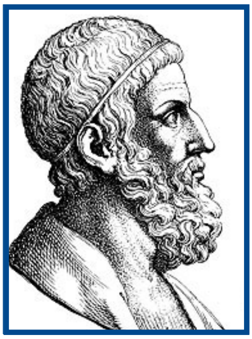


Թալես
(մոտ. 624-545 թթ. մ.թ.ա)

Պյութագորաս
(մոտ. 570-490 թթ. մ.թ.ա)



Էվկլիդես
(365-300 թթ. մ.թ.ա)



Արքիմեդ
(287-212 թթ. մ.թ.ա)

հաղթահարել են այն, քանի որ բոլոր ժամանակներում երկրաչափության իմացությունը համարվել է ընդհանուր կրթվածության դրսևորումներից մեկը: Այսօր ձեր հերթն է:

Դրա համար անհրաժեշտ է մեծ աշխատասիրություն և համառություն: Երկրաչափության ժամերին դուք կխորացնեք և կընդլայնեք պատկերների մասին կրտսեր դպրոցում ձեր ստացած պատկերացումները: Դուք կծանոթանաք նոր պատկերների և դրանց հատկություններին, թե ինչպես կիրառել այդ հատկությունները ամենատարբեր բնագավառներում:

Ընդհանուր դասընթացը պայմանականորեն տրոհված է երկու մասի՝ հարթաչափության և տարածաչափության: Առաջին մասում ուսումնասիրվում են հարթության մեջ դասավորված պատկերները, ինչպիսիք են՝ եռանկյունները, քառանկյունները, շրջանագծերը, ինչպես նաև դրանց հատկությունները: Երկրորդ մասում՝ տարածաչափության մեջ, ուսումնասիրվելու են տարածական պատկերները և դրանց հատկությունները: Բնականաբար, սկզբում ուսումնասիրվում է հարթաչափությունը:

Դասագիրքը բաղկացած է գլուխներից, գլուխները՝ պարագրաֆներից: Յուրաքանչյուր պարագրաֆից հետո առաջադրվում են ինքնաստուգման հարցեր: Փորձելով պատասխանել դրանց՝ դուք ի վիճակի կլինեք պարզել, թե որքանով եք յուրացրել տեսական մասը: Սակայն ձեր ուսումը կլինի լիարժեք, եթե տեսական նյութը յուրացնելիս դուք կարողանաք լուծել խնդիրները: Խնդիրներ առաջադրված են յուրաքանչյուր պարագրաֆից և յուրաքանչյուր գլխից հետո: Նրանց *համար, ովքեր կարողացան լուծել այդ խնդիրները, առաջադրված են ավելի բարդ խնդիրներ: Դրանք լուծելն ավելի դժվար է, բայց նաև ավելի հետաքրքիր: Հիշեք, որ խնդիրներ լուծելով դուք կկարողանաք տեսնել երկրաչափության ներքին կատարյալությունը և գեղեցկությունը:*

Դասընթացում նախատեսվում է համակարգչային ծրագրերի ակտիվ կիրառում: Բացի այդ, ծրագրերի օգտագործմամբ առաջադրություններ կատարելիս խորհուրդ ենք տալիս համակարգչում բացել և պահպանել անվանական կայք, որում կկուտակեք ձեր աշխատանքները: Հետագայում ուսումնական նյութը կրկնելիս այդ կայքը կլինի չափազանց օգտակար: Խորհուրդ ենք տալիս նաև ազատ ժամանակ անդրադառնալ կայքին, կրկնել դրա պարունակությունը և նույնիսկ կատարել լրացումներ:

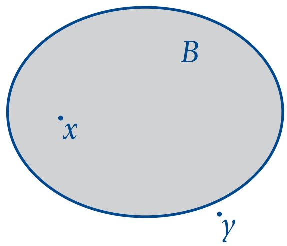
Անհասկանալի հարցերով դիմեք ձեր դասընկերներին, ծնողներին, ուսուցչին: Հուսով ենք, որ լիարժեք կյուրացնեք երկրաչափությունը, և ցանկանում ենք հաջողություն:

§1. ՇՐՋԱԿԱ ԱՇԽԱՐՀԸ ԵՎ ԵՐԿՐԱՉԱՓՈՒԹՅՈՒՆԸ

Երկրաչափությունը ծագել է մարդկանց ամենօրյա գործունեության շնորհիվ, և նրա պատմությունը սկսվել է չորս հազարամյակ առաջ: Մեր հեռավոր նախնիները նկատել են, որ տարբեր առարկաներ կարող են ունենալ միատեսակ ձև: Միևնույն ձևի առարկաների մեջ կարելի է դիտել տարբեր չափսերի առարկաներ: Օրինակ՝ տարբեր ցուլերը կամ գոմեշները ունեն միատեսակ ձև, սակայն միգուցե տարբեր չափսեր: Բնականաբար, այդ տեղեկատվությունը հնարավոր է տարածել բոլոր կենդանիների վրա (նաև մարդկանց): Ենթադրենք կառուցվել է տուն և այդ տունը գեղեցիկ է ու հարմար: Այդ դեպքում կարելի է կառուցել նույն ձևի տուն, սակայն մի գուցե այլ չափսերի: Միշտ չէ խելամիտ կառուցել շինություններ, որոնք ունեն շատ մեծ չափսեր: Օրինակ՝ Էջմիածնում սուրբ Գայանեի տաճարը վաղ քրիստոնեական ճարտարապետության փայլուն գլուխգործոց է: Սակայն, եթե կառուցվի նման եկեղեցի, բայց երկու անգամ մեծ չափսերի, ապա տպավորությունը կլինի բացասական: Երկրաչափության իմացությունը տալիս է տեղեկություններ շրջակա աշխարհի կառույցների ձևի, դրանց օպտիմալ չափսերի վերաբերյալ: Ուրեմն երկրաչափության իմացությունը ձևավորում է որոշակի ճաշակ: Նույն ձևի առարկաները համեմատելու և դրա միջոցով այլ առարկաներ ճանաչելու ունակությունը բնորոշ է նույնիսկ որոշ կենդանիների: Շատ փոքր երեխաները ճանաչում են շրջակա միջավայրի առարկաները և մարդկանց՝ ըստ նրանց արտաքին ձևի: Նմանապես հնում մարդիկ սովորում էին ճանաչել այս կամ այն առարկաները ըստ ձևի և չափսերի: Դա հարմար էր առօրյայում, օրինակ, ուղղանկյունաձև հողամասեր բաշխելիս (այդ ավանդույթը շատ երկրներում պահպանվել է մինչ օրս): Հարմարությունն այն էր, որ հողամասերի սահմաններն ինչ-ինչ պատճառներով խախտվելիս հնարավոր էր դրանք արագ վերականգնել: Իհարկե, միշտ չէ, որ հողամասերը կատարյալ ուղղանկյունաձև էին: Էական է, որ այդ ձևի հաճախ օգտագործումը հանգեցնում է ուղղանկյան վերացական (այսինքն՝ կոնկրետ հողամասի հետ կապ չունեցող) հասկացությանը: Հնում մարդիկ ստիպված էին ծախսել շատ ուժ ու եռանդ՝ բնության մեջ վերապրելու խնդիրը լուծելու համար: Վերացականի մասին մտորումների համար նրանց ժամանակ չէր մնում: Ահա թե ինչու, ասենք, Հին Եգիպտոսում երկրաչափության, բժշկության, տնտեսության, կառավարման հետ կապված խնդիրները կենտրոնացած էին քրմերի ձեռքերում: Նրանք համեմատաբար ազատ էին ամենօրյա հոգսերից և կարող էին ժամանակ հատկացնել այդ հարցերին: Քրմերն ունեին բավականին տեղեկություններ եռանկյունների, բազմանկյունների, շրջանագծի, էլիպսի, նաև տարածական պատկերների մասին: Ինչը հատկապես կարևոր է, նրանք կարողանում էին կիրառել այդ տեղեկությունները ամենօրյա գործունեության մեջ: Նրանք սովորեցին կազմել օրացույցներ, դրա համար անհրաժեշտ էր իմանալ Արեգակի շուրջ Երկրագնդի շրջման պարբերությունը: Դա իր հերթին պահանջում է աստղագիտության իմացություն: Հին Հունաստանում կատարեցին հաջորդ քայլը՝ անցնելով զուտ գործնական խնդիրներից երկրաչափական հետազոտությունների: Շատ շուտով պարզվեց, որ դա շատ հետաքրքիր և գրավիչ զբաղմունք է, և փիլիսոփայական դպրոցները զբաղվեցին երկրաչափական խնդիրներով: Արքիմեդը, որը Հին աշխարհի լավագույն երկրաչափն էր, երկրաչափական խնդիրների լուծումը արտակարգ հնարամտությամբ զուգակցում էր դրանց գործնական կիրառություններին: Սակայն ինքն այդ կիրառություններին մեծ նշանակություն չէր տալիս՝ իր լավագույն նվաճումները համարելով տեսական արդյունքները: Արքիմեդի գերեզմանը գտնվում է Սիցիլիա կղզու հարավում տեղակայված Սիրակուզա քաղաքի կենտրոնական մասում: Իր ցանկությամբ՝ գերեզմանաքարի վրա պատկերված է գլանին ներգծված գունդ: Նա կարողացել էր հաշվել այդ երկրաչափական մարմինների ծավալների հարաբերությունը և դա համարում էր իր լավագույն արդյունքը երկրաչափության մեջ: Մեր մոլորակը՝ Երկիրը, ունի բազմաթիվ անհարթություններ, բարձրավանդակներ, կանյոններ, սակայն որոշ մոտարկմամբ այն համարում են գունդ: Մոլորակի հատկությունները ուսումնասիրելու համար ուսումնասիրում են մոտավորապես **6400** կմ շառավղով գնդային մակերևույթի երկրաչափությունը: Դա հնարավորություն է տալիս բավական մեծ ճշտությամբ հաշվարկել Արեգակի շուրջ Երկրագնդի շարժման հետագիծը, օրվա տևողությունը: Լուծվել են խնդիրներ, որոնք տրամադրում են օգտակար տեղեկատվություն և օգնում ժամանակակից քաղաքակրթությանը ավելի հարմարավետ տեղավորվել մոլորակի վրա: Պարզ է, որ մի շարք այլ խնդիրներ լուծելիս այդ մոտարկումը կարող է լինել ոչ այնքան բավարար: Այդ դեպքում ամբողջ մակերևույթն ուսումնասիրելու փոխարեն սահմանափակվում են դրա մի մասի ուսումնասիրմամբ: Դա հնարավորություն է տալիս անհրաժեշտ հաշվարկները կատարել ավելի մեծ ճշտությամբ: Այսպիսով, երկրաչափության մեջ ուսումնասիրում են պատկերներ, որոնք, որպես կանոն, իրական օբյեկտների կատարյալ կերպարներն են: Երկրաչափությունն ուսումնասիրում է երկրաչափական պատկերների հատուկ հատկություններ: Սակայն կյանքը նոր խնդիրներ է առաջադրում, և դրանով որոշ չափով որոշում է երկրաչափական գիտության զարգացման ուղղությունները: Օրինակ՝ այսօր երկրաչափական խնդիրների բազմության մեջ առանձնանում է մեծ Տիեզերքի կառուցվածքի ուսումնասիրության խնդիրը: Դրանցից է տեսական ենթադրության կարգավիճակով ներմուծված սև խոռոչների կառուցվածքի խնդիրը և դրանց հնարավոր բաշխումը տիեզերքում: Սև խոռոչների տեսությունը այսօր ճանաչված է ոչ ստույգ և առաջացել է այն հաստատելու կամ հերքելու հարցը: Երկրաչափական ուսումնասիրությունը կարող է տալ համապատասխան ճշգրիտ նկարագրություն և ներմուծել անհրաժեշտ ճշտումներ ժամանակակից տեսության մեջ: Երկրաչափությանը կարելի է հանդիպել աստղագիտության մեջ, որտեղ երկրաչափական բովանդակությամբ կանոնները նկարագրում են Արեգակի շուրջ մոլորակների շարժման օրենքները: Երկրաչափությունը կիրառվում է և՛ մեխանիկայում, և՛ ֆիզիկայում, և՛ էկոնոմիկայում, և՛ կենսաբանության մեջ (երբեմն նույնիսկ ֆուտբոլում):

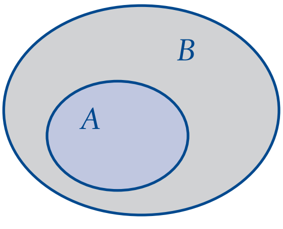
Ուսումնասիրելով երկրաչափության տվյալ դասընթացը (ավելի ճիշտ՝ հարթության երկրաչափությունը՝ հարթաչափությունը)՝ դուք կծանոթանաք մի շարք երկրաչափական պատկերների, կսովորեք երկրաչափական և այլ մաթեմատիկական հասկացություններ ու տերմիններ, ինչպես նաև զանազան մաթեմատիկական դատողությունների ճիշտ օգտագործում:

§2. ԲԱԶՄՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ



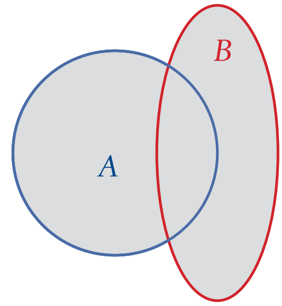
Նկ. 1

Բազմության հասկացությունը ժամանակակից մաթեմատիկայի, ուրեմն նաև երկրաչափության հիմնական հասկացություններից է: Այն ձեզ ծանոթ է կրտսեր դպրոցի մաթեմատիկայի դասընթացից: Հիշեցնենք այն: **Բազմությունը** ինչ-որ օբյեկտների հավաքածու է (ընտանիք, կազմավորում, խումբ): *Օրինակ*՝ աշակերտների բազմությունը տվյալ դասարանում, յոթերորդ դասարանցիների բազմությունը տվյալ քաղաքում: Այլ օրինակներ են տառերի բազմությունը դասագրքի տվյալ էջում, գայլերի բազմությունը տվյալ ոհմակում և այլն: Բազմությունը բաղկացած է **տարրերից**: *Օրինակ*՝ առյուծների փրայդում տարրերը իրենք առյուծներն են: Բազմությունները սովորաբար նշանակում են լատինական այբուբենի մեծատառերով՝ **A, B, C,..., X, Y, Z**: Բազմության տարրերը սովորաբար նշանակում են լատինական այբուբենի փոքրատառերով՝ **a, b, c,..., x, y, z**: Եթե **x**-ը **B** բազմության տարր է, ապա ընդունված է ասել, որ **x տարրը պատկանում է B բազմությանը՝ x ∈ B**: Այդ դեպքում ասում են նաև, որ **B բազմությունը պարունակում է (ընդգրկում է) x տարրը՝ B ∋ x**: Եթե **y**-ը **B** բազմության տարր չէ, ապա ընդունված է ասել որ **y տարրը չի պատկանում B բազմությանը. y ∉ B** (նկ. **1**): Այդ դեպքում ասում են նաև, որ **B բազմությունը չի ընդգրկում y տարրը**: Հարմարության համար ներմուծում են **դատարկ բազմության** հասկացությունը, այդ բազմությունը չունի տարրեր: Այդպիսի բազմության օրինակ կարող է ծառայել յոթերորդ դասարանցիների բազմությունը, որոնց հասակը գերազանցում է 3 մետր: (**2022 թ**. տվյալներով՝ երկրագնդի ամենաբարձրահասակ մարդն ունի **2**մ **51**սմ հասակ): **B** բազմության տարրերի **A** մասը կազմում է **B բազ-**

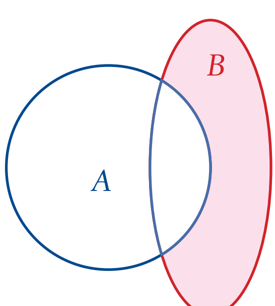


Նկ. 2

մության ենթաբազմություն. **A ⊂ B** (նկ. **2**)։ *Օրինակ*՝ ձեր բնակավայրի բոլոր շենքերի **A** բազմությունը ենթաբազմություն է մեր երկրի բոլոր բնակավայրերի բոլոր շենքերի **B** բազմության մեջ։ Երկրաչափության սույն դասընթացում մենք գործ ենք ունենալու կետերի, ուղիղների և այլ բազմությունների հետ։ **A** և **B** բազմությունները կոչվում են **հավասար**, եթե բաղկացած են նույն տարրերից (կետերից)։ Դա նշանակում է, որ **A** բազմության յուրաքանչյուր կետ պատկանում է **B** բազմությանը, և հակառակը՝ **B** բազմության յուրաքանչյուր կետ պատկանում է **A** բազմությանը՝ **A ⊂ B** և **B ⊂ A**։ Այլ կեպ ասած՝ **A**-ն և **B**-ն նույն բազմությունն են։ Այսպիսի նկարագրությունը ձեզ արդեն ծանոթ է. **a** և **b** թվերը հավասար են, եթե **a**-ն և **b**-ն նույն թիվն են։ Բազմությունների հավասարության հասկացությունը գործում է ողջ մաթեմատիկայում, ուրեմն նաև երկրաչափության մեջ։ Այստեղից եզրակացնում ենք, որ տարբեր բազմությունները հավասար լինել չեն կարող։ Եթե **A**-ն և **B**-ն որևէ բազմություններ են, ապա այդ **բազմությունների A ∪ B միավորում** անվանում են այն բոլոր կետերի բազմությունը, որոնք պատկանում են **A**-ին կամ **B**-ին (ներկված մասը նկար **3**-ում)։ **A և B բազմությունների հատում** (նշանակվում է **A ∩ B**) կոչվում է **A** և **B** բազմությունների ընդհանուր տարրերի բազմությունը։ Ուրեմն դա այն տարրերի բազմությունն է, որոնք պատկանում են և **A**-ին, և **B**-ին (ներկված մասը նկար 4-ում)։ Եթե **A** և **B** բազմություններից որևէ մեկը չի ընդգրկված մյուսի մեջ, ապա այդ բազմությունների հատումը ենթաբազմություն է և՛ **A**-ում, և՛ **B**-ում։ Դիցուք **A** բազմությունը ենթաբազմություն է **B**-ում. **A ⊂ B**։ **B** բազմության բոլոր այն կետերը, որոնք չեն պատկանում **A** ենթաբազմությանը, կազմում են մի բազմություն, որը կոչվում է **A**



Նկ. 3



Նկ. 4

բազմության լրացում B-ում: Այդ բազմությունը նշանակում են **B \ A** (կամ **CA**) (նկ. **2**): Այդ նկարում **B \ A** բազմությունը ներկված է վարդագույն: Բազմությունները սովորաբար նկարագրում են՝ թվարկելով դրանց տարրերը, ներկայացնելով այդ բազմության տարրերը միավորող հատկանիշը, կամ էլ աղյուսակի տեսքով: *Օրինակ*՝ **A = {2, 5, 7, 11, 13, 17, 19}** բազմությունը նկարագրված է՝ թվարկելով դրա տարրերը:

«Հարթության բոլոր այն կետերի բազմությունը, որն ընդգրկում է A, B կետերը և դրանց միջև դասավորված բոլոր կետերը, կոչվում է AB հատված»: Այս նկարագրության մեջ նշված է հատվածի հասկացությունը բնութագրող հատկությունը: Ինֆորմատիկայում առավել հաճախ օգտագործում են բազմությունների տրման աղյուսակային եղանակը: Այս հասկացությունները անմիջական կապ ունեն երկրաչափության հետ, քանի որ **երկրաչափական պատկերը** ինչ-որ կետերի բազմություն է: Ի տարբերություն բազմությունների տեսության՝ երկրաչափության մեջ ընդունված է նշանակումների այլ համակարգ: Կետերը նշանակում են լատինական այբուբենի մեծատառերով, ուղիղները՝ փոքրատառերով, իսկ հարթությունները՝ հունական այբուբենի փոքրատառերով: *Օրինակ*՝ $\mathbf{A} \notin \mathbf{d} \subset \alpha$ արտահայտությունը կարելի է մեկնաբանել հետևյալ կերպ. **A** կետը չի պատկանում **d** ուղղին, որը դասավորված է α հարթության մեջ: Պարզ է, որ այդպիսի պայմանավորվածությունները որևէ ձևով չեն ազդում բուն երկրաչափական փաստերի վրա:

Հարցեր և գործնական առաջադրանքներ

1. Նշել բազմությունների և ենթաբազմությունների օրինակներ:
2. Նշել բազմության օրինակ, որն ընդգրկում է. ա) երկու տարր, բ) երեք տարր, գ) անթիվ տարրեր: Քննարկել պատասխանը համադասարանցիների հետ:
3. Պատկանելիության պայմանանշանների կիրառմամբ գրառել հետևյալ արտահայտությունները. ա) **A, B, C** կետերը պատկանում են d ուղղին, բ) **A, B** կետերը պատկանում են d ուղղին, իսկ **C** կետը՝ ոչ, գ) **A, B** կետերը պատկանում են d ուղղին, որը դասավորված է α հարթության մեջ: Ո՞րն է $\in$ և $\subset$ պայմանանշանների տարբերությունը:

4. Ստորև նշված բազմություններից ո՞րն է պարունակում. ա) առավելագույն, բ) նվազագույն քանակի տարրեր՝ հայկական այբուբենի տառերի բազմությունը, լատինական այբուբենի տառերի բազմությունը, ձեր դասարանի աղջիկների բազմությունը, **40**-ը չգերազանցող երկնիշ բնական թվերի բազմությունը:

5. Քանի՞ տարր է պարունակում **A = {7, 3, 8, 11, 2, 5 + 6, 13, 3, 4 + 9}** բազմությունը:

6. Նշել **M = {7, 3, 11, 7}** բազմության բոլոր ենթաբազմությունները (ներառյալ դատարկ ենթաբազմությունը) և հաշվել դրանց ընդհանուր թիվը:

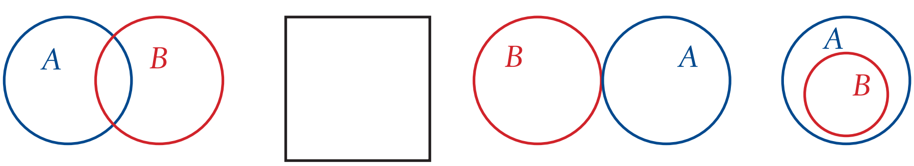
7. Նշել հետևյալ բազմությունների մի քանի ենթաբազմություն. ա) ձեր դասարանի բոլոր աշակերտների, բ) աշակերտական պայուսակում բոլոր գրենական պիտույքների, գ) ձեր դպրոցի դասասենյակների:

8. Նշել **M = {a, b, c, d}** բազմության (**a, b, c, d** տարրերը զույգ առ զույգ տարբեր են) բոլոր ենթաբազմությունները (ներառյալ դատարկ ենթաբազմությունը) և հաշվել դրանց ընդհանուր քանակը:

9. Ո՞ր բազմությունների միավորումն է ձեր դասարանի այն աշակերտների բազմությունը, որոնք նստած են առաջին շարքում:

10. Ո՞ր բազմությունների հատումն է ձեր դասարանի այն աշակերտների բազմությունը, որոնք նստած են երկրորդ շարքում:

11. «Կարմիր» և «կապույտ» շրջանների փոխադարձ դասավորության ո՞ր դեպքն է բացակայում:

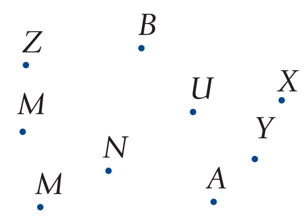


12. Երբեմն նույնիսկ դասագրքերում պատահում են «ուղիղը ընկած է հարթության մեջ» և «կետը ընկած է ուղղի վրա» արտահայտությունները: Նշել դրանց թերությունները և կատարել համապատասխան ուղղումներ:

§3. ԿԵՏ, ՈՒՂԻՂ, ՀԱՏՎԱԾ, ՃԱՌԱԳԱՅԹ

Երկրաչափության մեջ ուսումնասիրում են առարկաների ձևը և չափսերը՝ ուշադրություն չդարձնելով դրանց այլ հատկություններին՝ գույնին, բուրմունքին և այլն: **Կետերը և ուղիղները** մենք համարում ենք հիմնական երկրաչափական պատկերներ:

Ընդհանրապես ցանկացած կետային բազմություն կոչվում է **երկրաչափական պատկեր** կամ պարզապես **պատկեր**: Կետը պարզագույն երկրաչափական պատկերն է: Կարող ենք ասել, որ ցանկացած երկրաչափական պատկեր բաղկացած է կետերից: Ուղիղը նույնպես իր բոլոր կետերի միավորումն է: Ցանկացած առարկա կարելի է դիտարկել որպես երկրաչափական պատկեր, եթե հաշվի առնել միայն դրա ձևը և չափսերը: Սույն դասընթացում մենք համարելու ենք, որ բոլոր հիմնական երկրաչափական պատկերները՝ կետերը, ուղիղները դասավորված են միևնույն հարթության մեջ: Ըստ որում՝ այն պարունակում է կետերի և ուղիղների բավականաչափ մեծ պաշար: Դեռ Հին աշխարհում գիտնականները փորձում էին ապացուցել, որ բնության մեջ բոլոր մարմինները բաղկացած են մանրագույն մասնիկներից՝ ատոմներից, և կետը ատոմի մոդել էր: Ճիշտ է, հետագայում պարզվեց, որ ատոմը անբաժանելի չէ, սակայն կետի հասկացությունը պահպանվեց որպես հիմնական երկրաչափական հասկացություն: Պարզ է, որ կետը անտեսանելի է, սակայն երկրաչափական խնդիրներ լուծելիս պայմանավորվում են այն պատկերել շատ փոքր շրջանի տեսքով: Ինչպես արդեն ասվել է, կետերը նշանակում են լատինական այբուբենի մեծատառերով՝ **A, B, C, M, N, X, Y, Z, U** (նկ. **5**): Հաջորդ պարզ երկրաչափական պատկերը **կետերի զույգն է** (նկ. **6**): Կրտսեր դպրոցում դուք հաճախ գործ եք ունեցել այդ պատկերի հետ. մասնավորապես՝ միացնում էիք երկու կետ քանոնի միջոցով: **Ուղիղը** ևս պարզ երկրաչափական պատկեր է: Պատկերացում ուղղի մասին կարող են տալ սենյակի պատի և



Նկ. 5

Նկ. 6

Նկ. 7

առաստաղի, պատի և հատակի միացման գծերը, քանոնի եզրը, գծանշման մեքենայի հետքը և այլն: Ուղիղն անսահմանափակ է, բնության մեջ դրա բնօրինակը գոյություն չունի, սակայն երկրաչափության դպրոցական դասընթացում դրա անսահմանափակության կարիքը չկա: Գծագրում հնարավոր է պատկերել ուղղի միայն մի մասը: Ուղիղը պարունակում է անթիվ բազմությամբ կետեր, սակայն այդ ուղիղը պատկերելու համար բավական է ունենալ այդ ուղղին պատկանող երկու կետ: Եթե կետը պատկանում է ուղղին, ապա ընդունված է ասել, որ **ուղիղն անցնում է այդ կետով**: Ուղղի հիմնական հատկություններից մեկն այն է, որ.

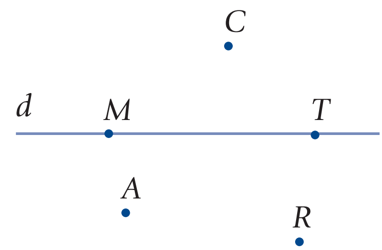
1. Ցանկացած երկու կետով անցնում է միայն մեկ ուղիղ:

Շատ հաճախ ուղղի այդ հատկությունն արտահայտում են հետևյալ կերպ. **ուղիղը որոշվում է իր երկու կետերով** (նկ. **7**): Համաձայն այդ հատկության՝ ցանկացած երկու կետերի համար գոյություն ունի ուղիղ, որն անցնում է այդ կետերով, և այդ ուղիղը միակն է, միայն մեկը: Ուրեմն եթե տրված են ուղղի երկու կետեր, ապա ուղիղը նույնպես տրված է: Դա նշանակում է, որ կարելի է վերցնել բավականաչափ երկար քանոն և կառուցել այդ կետերով անցնող ուղղի մի մասը: Օրինակ՝ եթե պահանջվում է երկար տախտակը սղոցել երկայնքով, իսկ քանոնը կարճ է, ապա նշում են կտրման հատվածի որևէ երկու մոտ դասավորված կետեր: Այնուհետև քանոնի միջոցով այդ հատվածը աստիճանաբար ուղղագիծ շարունակում են (նկ. **8**):

Չնայած սովորաբար ուղիղները նշանակում են լատինական այբուբենի փոքրատառերով՝ **a, b, c, d, p, q,** հաշվի առնելով հատկություն

Նկ. 8

1-ը, **A** և **B** կետերով անցնող ուղիղը նշանակում են նաև **AB** (կամ **BA**): Այսպիսով, մասնավորապես $\mathbf{A \in AB}$ և $\mathbf{B \in AB}$: Պարզ է նաև, որ **AB** և **BA** ուղիղները համընկնում են, այսինքն՝ դա նույն ուղիղն է (**AB** և **BA** ուղիղները բաղկացած են նույն կետերից) **AB = BA**: Օգտագործելով պայմանանշանները, հատկություն ***1***-ը կարելի է ներկայացնել այսպես. եթե $\mathbf{A \in d}$ և $\mathbf{B \in d}$, ապա **AB = d** կամ **BA = d**:



Նկ. 9

Նկար **9**-ում պատկերված **d** ուղիղը պարունակում է **M** և **T** կետերը և չի պարունակում **R, C, A** կետերը: Կարող ենք ասել նաև, որ d ուղիղն անցնում է **M** և **T** կետերով և չի անցնում **R, C, A** կետերից որևէ մեկով: Այլ կերպ՝ **M** և **T** կետերը պատկանում են **d** ուղղին, իսկ **R, C, A** կետերը՝ ոչ:

Ուրեմն նկար **9**-ում պատկերված **d** ուղիղը կարելի է նշանակել նաև **MT**: Եթե **MT** ուղղի վրա վերցնենք **M**-ից և **T**-ից տարբեր որևէ **K** կետ, ապա **MK** (և **TK**) ուղիղը կհամընկնի **MT** ուղղին: Ցանկացած երկու կետերով անցնում է միայն մեկ ուղիղ: Երեք կետերի համար դա ընդհանուր դեպքում ճշմարիտ չէ, քանի որ տեղի ունի հետևյալ հատկությունը.

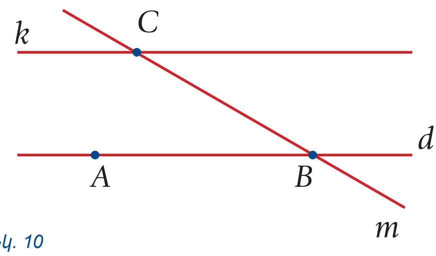
2. Գոյություն ունեն երեք կետեր, որոնք չեն պատկանում միևնույն ուղղին:

Այստեղից հետևում է, որ գոյություն ունեն անթիվ բազմությամբ կետեր, որոնք չեն պատկանում տրված ուղղին: Այլ կերպ ասած՝ մեկ ուղղի կետերի բազմությունը չի սպառում հարթության բոլոր կետերը: Դա բնական է, քանի որ ուղղի կետերի բազմությունը հարթության կետերի բազմության բազմաթիվ ենթաբազմություններից է:

3. Միևնույն ուղղի չպատկանող ցանկացած երեք կետով անցնում է հարթություն և այն էլ միայն մեկը:

4. Եթե ուղղի երկու կետ պատկանում են հարթությանը, ապա այդ ուղղի բոլոր կետերը պատկանում են այդ հարթությանը:

Եթե **A, B, C** կետերը չեն պատկանում միևնույն ուղղին, ապա դրանցից ցանկացած երկուսով անցնող ուղիղը չի պարունակում երրորդ



Նկ. 10

կետը: Օրինակ՝ նկար **9**-ում **M** և **T** կետերով անցնող **d** ուղիղը չի պատկանում **A** կետը, **AT** ուղիղը չի պարունակում **M** կետը և **T** կետը չի պատկանում **AM** ուղղին: Ուրեմն **A, T, M** կետերը չեն պատկանում միևնույն ուղղի: Ըստ հատկություն ***1***-ի՝ այդ կետերը որոշում են երեք ուղիղ՝ **AB, BC, CA,** ընդ որում՝ A կետը չի պատկանում **BC** ուղղին, **B** կետը չի պատկանում **AC** ուղղին, իսկ **C** կետը՝ **AB** ուղղին: Մյուս կողմից, **AB** և **BC** ուղիղներն ունեն ընդհանուր կետ՝ **B** կետը (**AB** ∩ **BC** = **B**), **BC** և **CA** ուղիղները՝ **C** ընդհանուր կետը (**BC** ∩ **CA** = **C**), իսկ **AC** և **AB** ուղիղները՝ **A** ընդհանուր կետը (**AC** ∩ **AB** = **A**): Ընդհանուր կետ պարունակող երկու տարբեր ուղիղներն անվանում են **հատվող**, իսկ առանց ընդհանուր կետերի երկու ուղիղները՝ **չհատվող ուղիղներ**: Նկար **10**-ում **d** և **m** ուղիղները հատվում են, իսկ **d** և **k** ուղիղները՝ ոչ: Տարբեր ուղիղները կարող են ունենալ միայն մեկ ընդհանուր կետ: Իրոք, ենթադրենք հակառակը, այսինքն՝ որ երկու տարբեր ուղիղներ պարունակում են երկու ընդհանուր կետ: Այդ երկու կետերով որոշվում է միակ ուղիղ: Դա նշանակում է, որ այդ ուղիղները համընկնում են, ինչը հակասում է ենթադրությանը: Ուրեմն ենթադրությունը կեղծ էր, և իրականում տարբեր ուղիղները չեն կարող պարունակել մեկից ավելի ընդհանուր կետ: Այսպիսով, հարթության մեջ **երկու տարբեր ուղիղներ կա՛մ հատվում են միայն մեկ կետում, կա՛մ էլ չեն հատվում**: Ուրեմն ուղիղը պարունակում է անթիվ բազմությամբ կետեր, իսկ հարթությունը՝ անթիվ բազմությամբ կետեր և ուղիղներ:

Վերը նշված երկու հատկություններն անվանում են **պատկանելիության աքսիոմներ** (հունարենում ἀξίωμα բառը նշանակում է հավաստի, ապացուցման կարիք չունեցող դրույթ): Դրանք արտահայտում են կետի և ուղղի պատկանելիության հիմնական հատկությունները:

Եթե **A** կետը պատկանում է **d** ուղղին, որում նշված են որևէ **M** և **N** կետեր, ապա այդ պատկանելիությունը կարելի ներկայացնել այսպես՝ **A** ∈ **d** կամ **A** ∈ **MN**: Եթե **A** կետը չի պատկանում **d** ուղղին (**MN** ուղղին), ապա գրում են **A** ∉ **d** կամ **A** ∉ **MN**: Նշենք, որ **MN** և **NM** ուղիղները համընկնում են, այսինքն՝ հավասար են:

Այժմ դիտարկենք այն դեպքը, երբ երեք կետերը պատկանում են միևնույն ուղղի: Այդպիսի երեք կետերի փոխադարձ դասավորությունը բնութագրվում է **«միջև դասավորվելու»** հարաբերության միջոցով, որը մենք համարելու ենք հայտնի: Այն կարելի է նկարագրել հետևյալ կարգի աքսիոմներով:

Նկ. 11

5. Եթե C կետը դասավորված է A և B կետերի միջև, ապա A-ն, B-ն, C-ն նույն ուղղի երեք զույգ առ զույգ տարբեր կետեր են, և C կետը դասավորված է B և A կետերի միջև (նկ. 11):

«**C** կետը դասավորված է **A** և **B** կետերի միջև» հարաբերությունը նշանակում են այսպես. **A – C – B**:

6. Ուղղի ցանկացած երեք կետերից մեկը և միայն մեկն է դասավորված մնացած երկուսի միջև:

Աքսիոմ **4**-ի պնդումը նշանակում է հետևյալը: Դիցուք **A**-ն, **B**-ն, **C**-ն տրված ուղղի երեք կետեր են և, օրինակ, **C** կետը դասավորված է **A** և **B** կետերի միջև: Այդ դեպքում **B** կետը չի կարող դասավորված լինել **A** և **C** կետերի միջև, և **A** կետը չի կարող դասավորված լինել **B** և **C** կետերի միջև:

7. Ուղղի ցանկացած A և B կետերի համար գոյություն ունի այնպիսի C կետ, որ B կետը դասավորված է A և C կետերի միջև, և այնպիսի D կետ, որ D կետը դասավորված է A և B կետերի միջև (նկ. **12**):

Նկ. 12

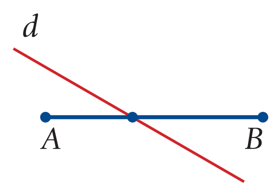
Եթե **A**-ն և **B**-ն տրված ուղղի կետեր են, ապա գոյություն ունի այնպիսի **C** կետ, որ **C** կետը դասավորված է **A** և **B** կետերի միջև: Ըստ աքսիոմ 7-ի՝ գոյություն ունի այնպիսի **D** կետ, որ **D** կետը դասավորված է **A** և **C** կետերի միջև, և այնպիսի **E** կետ, որ **E** կետը դասավորված է **A** և **D** կետերի միջև և այլն (նկ. **13**): Այստեղից հետևում է, որ ուղղի տրված **A** և **B** կետերի միջև գոյություն ունեն անթիվ բազմությամբ կետեր:

Նկ. 13

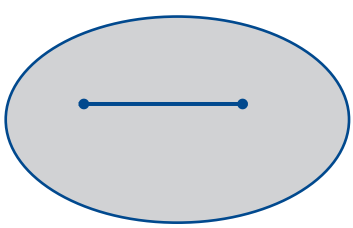
Նկ. 14

Այժմ կարող ենք ներմուծել երկրաչափության հիմնական հասկացություններից մեկը՝ հատվածի հասկացությունը: Դիցուք **A**-ն և **B**-ն կամայական կետեր են: **AB հատված** կոչվում է **AB ուղղի կետերի ենթաբազմությունը, որը բաղկացած է A և B կետերից և դրանց միջև դասավորված բոլոր կետերից** (նկ. 14): **A** և **B** կետերն անվանում են **AB հատվածի ծայրակետեր**, իսկ այդ կետերի միջև դասավորված կետերը՝ **AB հատվածի ներքին կետեր**: **AB** ուղղի այն կետերը, որոնք չեն դասավորված **A** և **B** կետերի միջև և չեն համընկնում այդ կետերից որևէ մեկին, կոչվում են **AB հատվածի արտաքին կետեր**:

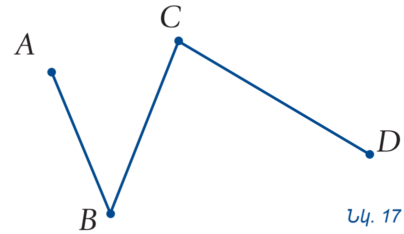
Պարզ է, որ **AB** հատվածը համընկնում է **BA** հատվածին. դա կետերի նույն բազմությունն է: Այսպիսով, **AB** հատվածը ուղղի **A**, **B** կետերով սահմանափակված մասն է: Հարմարության համար ներմուծում են **զրոյական հատվածի** հասկացությունը. դա հատված է, որի ծայրակետերը համընկնում են: Հատվածը ուղղի մի մասն է, ուստի հնարավոր է ներմուծել ուղղի և հատվածի հատման կետի հասկացությունը: **Ուղիղը հատում է հատվածը**, եթե այն ընդգրկում է այդ հատվածի որևէ կետ (նկ. **15**): Հատվածն օժտված է ևս մեկ կարևոր հատկությամբ: Դժվար չէ նկատել, որ եթե **M** և **N** կետերը պատկանում են **AB** հատվածին, ապա **MN** հատվածի ցանկացած կետ ևս պատկանում է **AB** հատվածին: Երկրաչափական պատկերը կոչվում է **ուռուցիկ պատկեր**, եթե իր ցանկացած **M, N** կետերի հետ մեկտեղ այն պարունակում է նաև այդ կետերով որոշվող հատվածի բոլոր կետերը (նկ. **16**): Ուրեմն մասնավորապես հատվածն ուռուցիկ պատկեր է:



Նկ. 15


Նկ. 16

Հատվածների միջոցով հնարավոր է կառուցել նորանոր երկրաչափական պատկերներ: Դիտարկենք, օրինակ, **A, B, C, D** կետեր, որոնցից ցանկացած երեքը չեն պատկանում միևնույն ուղղի (նկ. **17**), և կառուցենք **AB, BC, CD** հատվածները: Այդ հատվածների միավորումը կոչվում է **բեկյալ**: **A, B, C, D** կետերը կոչվում են **բեկյալի գագաթներ**, իսկ **AB, BC, CD** հատվածները՝ **բեկյալի օղակներ**: **A** կետը կոչվում է **ABCD բեկյալի սկզբնակետ**, իսկ **D** կետը՝ **վերջնակետ**: Բեկյալը, որի վերջնակետը համընկնում է սկզբնակետին, կոչվում է **փակ բեկյալ**:



Նկ. 17

Նկ. 18

Նկար **18**-ում վերջին բեկյալը փակ է: Պարզ է, որ բեկյալի օղակների քանակը կարող է լինել միավորից մեծ ցանկացած ամբողջ դրական թիվ, և, համապատասխանաբար, բեկյալի գագաթների քանակը կարող է լինել երկուսից մեծ ցանկացած այդպիսի թիվ: Բեկյալները բավականին պարզ երկրաչափական պատկերներ են: Սակայն նույնիսկ դրանք ունեն զանազան գործնական կիրառություններ ամենատարբեր բնագավառներում: Տնտեսագիտության մեջ հայտնի է առևտրականի խնդիրը, որը պետք է հաճախի մի շարք տրված բնակավայրեր այնպես, որպեսզի լուծվի օպտիմալացման խնդիր. ա) հասցնել նվազագույնի անցնելի ճանապարհը, բ) հասցնել նվազագույնի ծախսվող ժամանակը, գ) հասցնել նվազագույնի ծախսվող ժամանակը և ծախսվող վառելանյութը: Այդ խնդրի ա) տարբերակը լուծում են հատուկ քայլաշարով (Կռասկալի ալգորիթմով):

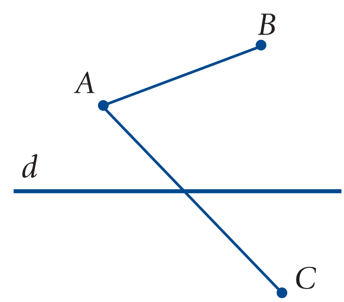
Բեկյալների կարելի է հանդիպել նույնիսկ ֆուտբոլային հանդիպումների ժամանակ, երբ փոխանցումների երեք-, չորսօղականոց բեկյալի միջոցով հարձակվողները դուրս են գալիս հարվածային դիրքի:

Դիտարկենք ուղղի հերթական կարևոր հատկությունը:

8. Ցանկացած ուղիղ տրոհում է հարթության այդ ուղղին չպատկանող կետերի բազմությունը երկու

ենթաբազմության: Միևնույն ենթաբազմությանը պատկանող ցանկացած երկու կետերով որոշվող հատվածը չի հատում այդ ուղիղը: Տարբեր ենթաբազմությունների ցանկացած երկու կետերով որոշվող հատվածը հատում է այդ ուղիղը (նկ. **19**)*:*

Նկար **19**-ում **A** և **B** կետերը դասավորված են d ուղղով որոշվող միևնույն ենթաբազմության մեջ, իսկ **A** և **C** կետերը՝ տարբեր ենթաբազմություններում: Դրանցից յուրաքանչյուրը կոչվում է **d սահմանով կիսահարթություն**: Նշենք, որ **d** սահմանը չի պատկանում այդ կիսահարթություններին:

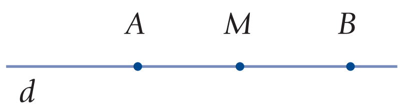


Նկ. 19

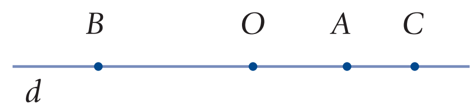
Կիսահարթությունը որոշելու համար բավական է նշել դրա սահմանը և իրեն պատկանող որևէ կետ: Նկար **19**-ում պատկերված (**d, A**) կիսահարթությունը որոշված է **d** սահմանով և իրեն պատկանող **A** կետով: Տրված (**d, A**) կիսահարթության մեջ դասավորված պատկերների մասին երբեմն ասում են, որ դրանք դասավորված են **d** ուղղի միևնույն կողմում: Ուրեմն երկու երկրաչափական պատկերներ **դասավորված են d ուղղի միևնույն կողմում**, եթե դրանց բոլոր կետերը դասավորված են **d** ուղղի այդ կողմում: Քննարկենք երկու երկրաչափական պատկերների դասավորությունը **d** ուղղի տարբեր կողմերում: Այդպիսի պատկերներից յուրաքանչյուրի բոլոր կետերը դասավորված են **d** ուղղի միևնույն կողմում: Տարբեր պատկերների ցանկացած երկու կետ դասավորված են **d** ուղղի տարբեր կողմերում:

9. d ուղղի ցանկացած M կետ այդ ուղղի մնացած կետերի ենթաբազմությունը տրոհում է երկու մասի: Տարբեր մասերում դասավորված A և B կետերի համար M կետը AB հատվածի ներքին կետ է, միևնույն մասում դասավորված կետերի համար՝ արտաքին (նկ. **20**)*:*

Սովորաբար ասում են, որ **A և B կետերը դասավորված են M կետի միևնույն կողմում** կամ **տարբեր կողմերում**: Դիցուք **O**-ն **d** ուղղի կամայական կետ է: **d** ուղղի բոլոր այն կետերի բազմությունը, որ դասավորված է **O** կետի միևնույն կողմում, կոչվում է **O գագաթով ճառագայթ** (նկ. **21**):



Նկ. 20

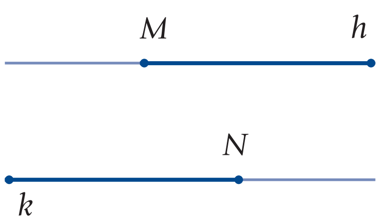


Նկ. 21

Այս նկարագրից հետևում է, որ ուղղի ցանկացած **O** կետ առաջացնում է **O** գագաթով երկու ճառագայթ (դրանք անվանում են **հակադիր ճառագայթներ**): Պարզ է, որ ճառագայթի գագաթը չի պատկանում այդ ճառագայթին:

Նկ. 22

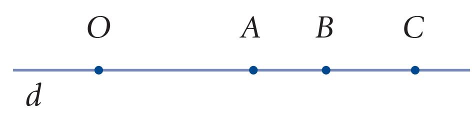
Այսպիսով, ուղիղը կարելի է ներկայացնել նույն գագաթով երկու հակադիր ճառագայթների և դրանց ընդհանուր գագաթի միավորման տեսքով (նկ. **21**): Սովորաբար ճառագայթը նշանակում են կա՛մ լատիներենի փոքրատառով (օրինակ, **h** ճառագայթը նկար **22**-ում), կա՛մ այլ եղանակով՝ լատիներենի երկու մեծատառերով, որոնցից առաջինը նշում է ճառագայթի գագաթը, իսկ երկրորդը՝ ճառագայթի որևէ կետ (օրինակ՝ **OA** ճառագայթը նկար **21**-ում): Եթե **A** և **B** կետերը դասավորված են **O** կետի միևնույն կողմում, ապա **OA** և **OB** ճառագայթները համընկնում են: Ենթադրենք, որ **A** կետը դասավորված է **O** և **B** կետերի միջև (նկ. **24**): Այդ դեպքում **OA** և **AB** ճառագայթները տարբեր են, սակայն որոշում են նույն ուղղությունը և այդ պատճառով կոչվում են **համուղղված ճառագայթներ**: Դիցուք **A** և **B** կետերը դասավորված են **O** կետի տարբեր կողմերում (նկ. **21**): Այդ դեպքում **OA** և **OB** ճառագայթները որոշում են հակադիր ուղղություններ և կոչվում են **հակուղղված ճառագայթներ**: Ճառագայթների համուղղվածությունը և հակուղղվածությունը կախված չէ այդ



Նկ. 23

ճառագայթների ընդհանուր գագաթ ունենալուց: *Օրինակ*՝ տարբեր գագաթներ ունեցող **AB** և **BA** ճառագայթները հակուղղված են: Ավելին, այդպիսի ճառագայթները կարող են դասավորված լինել տարբեր ուղիղների վրա (նկ. **23**):

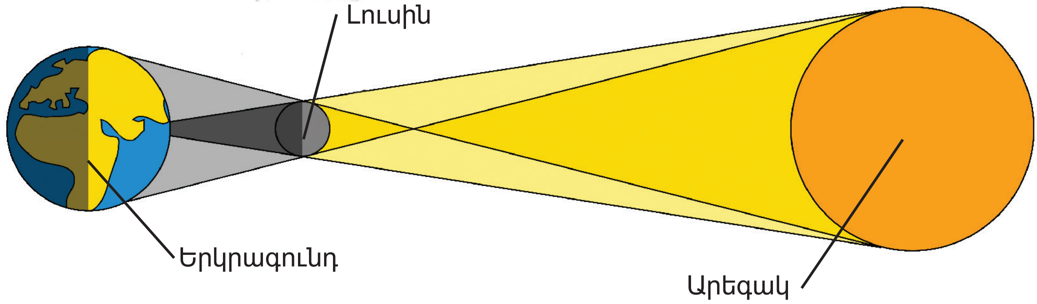
Ենթադրենք, **O, A, B, C** կետերը դասավորված են d ուղղի վրա այնպես, որ **A** կետը դասավորված է **O** և **B** կետերի միջև, իսկ **B** կետը՝ **O** և **C** կետերի միջև: Այդ դեպքում **A, B, C** կետերը դասավորված են **O** կետի միևնույն կողմում: Իրոք, ըստ առաջին պայմանի, **A** և **B** կետերը դասավորված են **O** կետի միևնույն կողմում, ըստ երկրորդ պայմանի՝ **C** և **B** կետերը նույնպես: Ուրեմն այս պայմաններից հետևում է, որ **A** և **C** կետերը դասավորված են **O** կետի միևնույն կողմում: Այստեղից եզրակացնում ենք, որ **A, B, C** կետերը դասավորված են **O** կետի միևնույն կողմում (նկ. **24**):



Նկ. 24

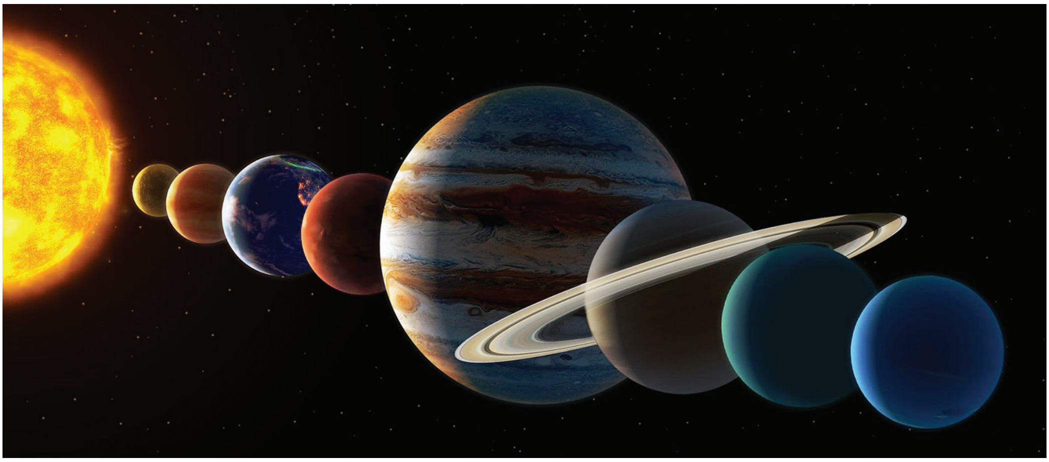
Այժմ ենթադրենք, որ **A, B, C** կետերը դասավորված են **d** ուղղի վրա այնպես, որ **A** կետը դասավորված է **O** և **B** կետերի միջև, իսկ **B** կետը՝ **O** և **C** կետերի միջև: Այդ դեպքում **B** կետը դասավորված է **A** և **C** կետերի միջև: Իրոք, նախ նկատենք, որ **A, B, C** կետերը դասավորված են **O** կետի միևնույն կողմում: Ենթադրենք, որ **B** կետը չի դասավորված **A** և **C** կետերի միջև: Այդ դեպքում, ըստ աքսիոմներ ***5***-ի և ***6***-ի, կա՛մ **A** կետը դասավորված է **B** և **C** կետերի միջև, կա՛մ էլ **C** կետը դասավորված է **A** և **B** կետերի միջև: Առաջին դեպքը հակասում է առաջին պայմանին, ըստ որի՝ **A** կետը **OB** հատվածի ներքին կետ է: Երկրորդ դեպքը հակասում է երկրորդ պայմանին, քանի որ **C** կետը **OB** հատվածի ներքին կետ չէ: Այսպիսով, երկու դեպքում էլ հանգում ենք հակասության: Հետևաբար ենթադրությունը, որ **B** կետը դասավորված չէ **A** և **C** կետերի միջև, կեղծ է, ուրեմն պնդումը լիովին հիմնավորված է: Այս փաստը ստանալիս մենք կիրառեցինք մի շարք դատողություններ, որի արդյունքում հիմնավորեցինք այն: Այդ գործընթացն անվանում են **ապացուցում**: Ուրեմն երկրաչափական փաստի ապացուցումը արդեն հայտնի փաստերի հիման վրա դրա առավել համոզիչ հիմնավորումն է:

Ինչպես արդեն գիտեք, ուղիղն անսահմանափակ երկրաչափական պատկեր է, և այն հնարավոր չէ պատկերել ամբողջությամբ: Գործնա-



Նկ. 25 (Արեգակի լրիվ խավարման սխեմա)

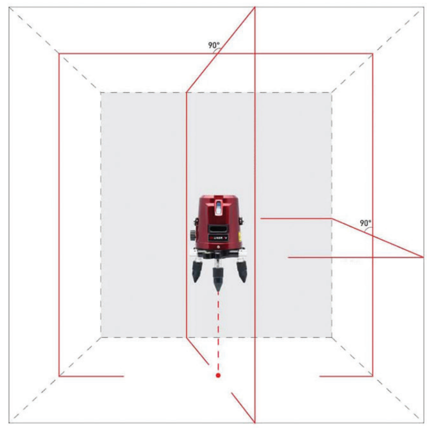
կանում կիրառում են ուղղի պարզագույն հատկությունները, որոնք կապված են այդ պատկերի կետերի ուղղագիծ դասավորության հետ: Ուղղի հասկացության կիրառություններ կարելի է հանդիպել ամենուրեք: Բնության մեջ երբեմն Լուսինը հայտնվում է Երկրագնդի և Արեգակի միջև, այսինքն՝ այդ երկնային մարմինները դասավորվում են միևնույն ուղղի վրա, և այդ երևույթն անվանում են **Արեգակի խավարում**: Ամենահետաքրքիրն այն է, որ Լուսնի չափսերը և դրա հեռավորությունը Երկրագնդից այնպիսին են, որ Արեգակի լրիվ խավարման ժամանակ Լուսինն ամբողջությամբ փակում է Արեգակը: Այլ դեպքում Արեգակնային համակարգի մոլորակները (կամ դրանց մի մասը) ստանում են ուղղագիծ դասավորություն Արեգակի մի կողմում: Այդ երևույթն անվանում են **մոլորակների շքերթ**: Այն ուղեկցվում է զանազան ցնցումներով և աղետներով բոլոր մոլորակներում՝ երկրաշարժեր, հրաբուխների



Նկ. 26 (մոլորակների շքերթի սխեման)

ա)

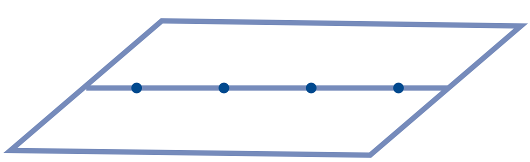
բ)



Նկ. 27 ա) Ուղղալար, բ) Լազերային ուղղաչափը գործողության մեջ

Նկ. 28

ժայթքումներ, հսկայական ծովային ալիքների ձևավորում և այլն: Շենքերի պատերի շինարարության մեջ հատուկ ուշադրություն են դարձնում դրանց ուղղաձգությանը, որը ստուգում են **ուղղալարի միջոցով** (նկ. **27, ա**): Պատի հերթական շարքը կառուցելիս հոգում են դրա ուղղագծության մասին: Դրա համար նախ տեղադրում են այդ շարքի երկու եզրային քարերը և դրանց ամրացնում բավականաչափ երկար թել: Մնացած քարերը շարելիս ղեկավարվում են այդ թելի ուղղությամբ: Ճանապարհաշինության մեջ լայն կիրառություն ունեն գծանշման մեքենաները, որոնք հնարավորություն են տալիս նշել ճանապարհի ուղղագիծ հատվածները, նաև ավտոմեքենաների շարժման գծերը: Նկար **28**-ում պատկերված է այդպիսի մեքենաներից մեկը:



Նկ. 29

Կրտսեր դպրոցից գիտեք, որ ուղղի մի մասը գծելու համար օգտագործում են քանոն: Սակայն մեր տրամադրության տակ գտնվող քանոնը կարող է շատ երկար չլինել: Ենթադրենք, պահանջվում է ուղղագիծ կտրել որևէ երկար տախտակ, իսկ քանոնը կարճ է և հնարավոր չէ դրա միջոցով միացնել տախտակի ծայրերը (նկ. **29**): Այսօր կան գործիքներ, որոնք հնարավորություն են տալիս կատարել այդ գործողությունը առանց քանոնի օգտագործման: Եթե ձեռքի տակ այդպիսի գործիք չկա, ապա նշում են որոնելի ուղիղ գծի կետերից մեկը: Այնուհետև չափում դրա հեռավորությունը տախտակի եզրից և մի քանի անգամ նշում կետեր, որոնք ունեն նույն հեռավորությունը տախտակի եզրից: Միացնելով այդ կետերը, ստանում են որոնելի ուղղագիծ կտրվածքի գիծը:

Հարցեր և գործնական առաջադրանքներ

13. Թվարկել հիմնական երկրաչափական պատկերները և հարաբերությունները:

14. Թվարկել պատկանելիության և կարգի աքսիոմները:

15. Կառուցել ուղիղ, նշանակել այն **a**-ով, նշել այդ ուղղի **A** և **B** կետեր և **P, Q, R** կետեր, որոնք չեն պատկանում **a**-ին: Նկարագրել **A, B, P, Q, R** կետերի և **a** ուղղի փոխադարձ դասավորությունը՝ օգտագործելով պատկանելիության պայմանանշանները:

16. Նշել որևէ **A, B** կետեր, գծել **AB** ուղիղը, նշել **C** և **D** կետեր, որոնք դասավորված են **A** և **B** կետերի միջև, **E** և **F** կետեր, որոնք չեն պատկանում այդ ուղղին: Գծել այդ կետերով անցնող բոլոր հնարավոր ուղիղները:

17. Գծել երեք ուղիղ այնպես, որ դրանցից յուրաքանչյուր երկուսը հատվեն: Նշանակել այդ ուղիղների հատման կետերը: Քանի՞ կետ կարող է ստացվել: Դիտարկել բոլոր հնարավոր դեպքերը:

18. Նշել **A, B, C, D** կետեր այնպես, որ դրանցից ցանկացած երեքը չպատկանեն միևնույն ուղղի: Յուրաքանչյուր երկու կետերով գծել ուղիղ: Քանի՞ ուղիղ ստացվեց:

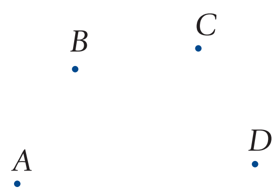
19. Նշել **A, B, C, D** կետեր այնպես, որ առաջին երեքը պատկանեն միևնույն ուղղին, իսկ չորրորդը չպատկանի այդ ուղղին: Յուրաքանչյուր երկու կետերով գծել ուղիղ: Քանի՞ ուղիղ ստացվեց:

20. Գծել **a** ուղիղ և նշել դրա **A** և **B** կետերը: Նշել նաև. ա) **AB** հատվածի **M** և **N** կետերը, բ) **P** և **Q** կետեր, որոնք պատկանում են **a** ուղղին և չեն պատկանում **AB** հատվածին, գ) **R** և **S** կետեր, որոնք չեն պատկանում **a** ուղղին:

21. **MN** և **KL** հատվածները չունեն ընդհանուր կետ: Հատվո՞ւմ են արդյոք **MN** և **KL** ուղիղները: Քննարկել բոլոր հնարավոր դեպքերը:

22. Գծել ուղիղ և դրա վրա նշել **A, B, C** կետեր: **A, B, C** ծայրակետերով քանի՞ հատված կստացվի:

Նկ. 30



Նկ. 31

23. Նկար 30-ում պատկերված է ուղիղ և նրա վրա նշված են **A, B, C** և **D** կետեր: Նշել բոլոր հատվածները, որոնք. ա) պարունակում են **C** կետը, բ) չեն պարունակում **B** կետը:

24. Նկար **31**-ում պատկերված են չորս կետեր, որոնցից ցանկացած երեքը չեն պատկանում միևնույն ուղղին: Ընդունելով այդ կետերը որպես հատվածների ծայրակետեր՝ գծել բոլոր հնարավոր հատվածները: Քանի՞ հատված ստացվեց: Նույն կառուցումը կատարել խնդիր **17**-ի պայմաններում:

25. Քանի՞ հատման կետ կարող են ունենալ չորս զույգ առ զույգ հատվող ուղիղները: Յուրաքանչյուր դեպքը ներկայացնել համապատասխան նկարի միջոցով:

26. **P, Q, R, S** կետերն ընդհանուր դիրքի են, այսինքն՝ դրանցից ցանկացած երեքը չեն պատկանում միևնույն ուղղի: Գծել **S** կետով անցնող ուղիղ, որը հատում է **PQ** հատվածը և չի հատում **QR** հատվածը: Հատո՞ւմ է արդյոք այդ ուղիղը **RS** հատվածը:

27. Ինչո՞վ է ճառագայթը տարբերվում ուղղից:

28. Ուղղի վրա նշված են չորս կետեր՝ **A, B, C** և **D**: Քանի՞ ա) հատված, բ) ճառագայթ են որոշում այդ կետերը:

29. **A, B, C** և **D** կետերը պատկանում են միևնույն ուղղին: Քանի՞ ճառագայթ և ուղղություն են որոշում այդ կետերի զույգերը:

30. Ինչպե՞ս գծել բեկյալը համակարգչի լուսատախտակին:

Հարցեր և խնդիրներ

31. Տրված են զույգ առ զույգ հատվող չորս ուղիղներ, որոնցից ոչ մի երեքը չեն անցնում միևնույն կետով: Քանի՞ հատված է ստացվում այդ բոլոր ուղիղների հատումամբ:

32. **A, B, C** և **D** կետերը ընդհանուր դիրքի են: Ինչի՞ է հավասար այդ կետերով անցնող ուղիղների առավելագույն թիվը:

33. **A, B, C** և **D** կետերը պատկանում են միևնույն ուղղի, ընդ որում՝ **B** կետը պատկանում է **AC** հատվածին, իսկ **C** կետը՝ **BD** հատվածին: Ապացուցել, որ **B** և **C** կետերը պատկանում են **AD** հատվածին:

34. Ապացուցել, որ ցանկացած **A** և **B** կետերի միջև գոյություն ունեն անթիվ բազմությամբ կետեր:

Ապացուցում: Դիցուք **A** և **B** կետերը պատկանում են **d** ուղղին (նկ. 30): Ըստ աքսիոմ ***5***-ի՝ գոյություն ունի **d** ուղղի **C** կետ, որը դասավորված է **A** և **B** կետերի միջև: Ըստ այդ նույն աքսիոմի՝ գոյություն ունի **D** կետ, որը դասավորված է **A** և **C** կետերի միջև: Այսպիսով, **A, B, C** և **D** կետերը միևնույն ուղղի կետեր են, ընդ որում՝ **D** կետը պատկանում է **AC** հատվածին, իսկ **C** կետը՝ **DB** հատվածին: Ըստ խնդիր **33**-ի՝ **C** և **D** կետերը պատկանում են **AB** հատվածին, այսինքն՝ դասավորված են **A** և **B** կետերի միջև: Նույն ձևով կարելի է ցույց տալ, որ **AD, DC, CB** հատվածներից յուրաքանչյուրը պարունակում է ներքին կետեր: Քանի որ այդ գործընթացը կարելի է շարունակել անվերջ, և բոլոր առաջացող կետերը դասավորված են **A** և **B** կետերի միջև, ուստի գոյություն ունեն անթիվ բազմությամբ կետեր, որոնք դասավորված են **A** և **B** կետերի միջև:

35. Քանի՞ մասերի (կիսահարթությունների) են տրոհում հարթությունը երկու ուղիղները:
36. Նկարագրել երեք ուղիղների փոխադարձ դասավորությունը:
37. Ապացուցել, որ ուղիղը ուռուցիկ երկրաչափական պատկեր է:
38. Քանի՞ հատման կետ կարող են ունենալ երեք ուղիղները:
39. Տրված են **A** և **B** կետեր: Ճշմարի՞տ է արդյոք, որ այդ կետերով անցնում է միայն մեկ ճառագայթ: Պատասխանը քննարկել համադասարանցիների հետ:
40. Ապացուցել, որ ճառագայթը ուռուցիկ երկրաչափական պատկեր է:
41. Տրված են **A** և **B** կետեր: Ճշմարի՞տ է արդյոք, որ գոյություն ունի **A** գագաթով միայն մեկ ճառագայթ, որը պարունակում է **B** կետը: Պատասխանը հիմնավորել օրինակներով:
42. **AB** և **CD** ճառագայթները որոշում են տարբեր, ոչ հակադիր ուղղություններ: Ճշմարի՞տ է արդյոք, որ այդ ճառագայթները հատվում են:
43. **AB** և **CD** ճառագայթները որոշում են տարբեր, ոչ հակադիր ուղղություններ: Ճշմարի՞տ է արդյոք, որ **AB** և **CD** ուղիղները հատվում են:
44. Նկարագրել ոչ ուռուցիկ երկրաչափական պատկերի օրինակ:
45. Համեմատել հետևյալ երկու առաջադրությունները.

Գոյություն ունեն երեք կետեր, որոնք չեն պատկանում միևնույն ուղղի:	Գոյություն ունեն չորս կետեր, որոնցից ցանկացած երեքը չեն պատկանում միևնույն ուղղի:

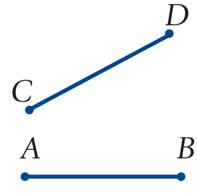
Ի՞նչ կարելի է պնդել դրանց ճշմարտացիության մասին: Ձևակերպել համանման պնդում հարթության հինգ կետերի համար: Պատկերել այդպիսի կետեր:
46. Ինչո՞վ է բեկյալը տարբերվում հատվածների բազմությունից:

47. Որոշել. ա) կամայական, բ) փակ բեկյալի գագաթների և օղակների թվերի կապը:

48. Համակարգչի լուսատախտակին պատկերել չհատվող ուղիղներ:

§4. ՀԱՏՎԱԾՆԵՐԻ ՀԱՄԵՄԱՏՈՒՄ: ՀԱՏՎԱԾԻ ԵՐԿԱՐՈՒԹՅՈՒՆ

Շրջապատում հաճախ կարելի է դիտել միևնույն ձևի կամ միևնույն ձևի և միևնույն չափսերի առարկաներ: Միևնույն ձևի պատկերներ են, օրինակ, մեծ և փոքր գնդակները, տարբեր չափսերի սղոցման սկավառակները և այլն: Միևնույն ձևի և միևնույն չափսերի պատկերների օրինակներ են միևնույն դասագրքի երկու տարբեր օրինակները, միևնույն տեսակի երկու տետրերը: Երկրաչափության մեջ միևնույն ձևի պատկերներն անվանում են **նման պատկերներ**: Միևնույն ձևի ու միևնույն չափսերի երկու երկրաչափական պատկերները կոչվում են **համընկնելի պատկերներ**: Համընկնող պատկերները բնականաբար անվանում են **հավասար պատկերներ**: Երկրաչափական պատկերների հավասարության հարաբերությունը գործածական չէ, և այն համարյա չի կիրառվում, այլ բան է երկրաչափական պատկերների համընկնելիությունը: Պարզ է, որ հավասար երկրաչափական պատկերները համընկնելի են, սակայն տարբեր համընկնելի երկրաչափական պատկերները հավասար լինել չեն կարող: Բանն այն է, որ ընդհանրապես տարբեր երկրաչափական պատկերները չեն կարող լինել հավասար (քանի որ դրանք տարբեր կետային բազմություններ են): Նկար **32**-ում պատկերված են **AB** և **CD** հատվածներ, որոնք ունեն նույն ձևը (երկուսն էլ հատվածներ են) և նույն չափսերը: Ուրեմն այդ հատվածները համընկնելի են, սակայն ոչ հավասար: Կրտսեր դպրոցում համընկնելի երկրաչափական պատկերները երբեմն անվանում են միատեսակ պատկերներ: Դժվար չէ համոզվել, որ երկրաչափական պատկերների համ-



Նկ. 32

ընկնելիության հարաբերությունը օժտված է հետևյալ հատկություններով.

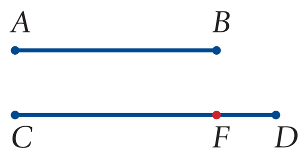
1). Ցանկացած երկրաչափական պատկեր համընկնելի է ինքն իրեն (անդրադարձականություն):
*2). Եթե **F** երկրաչափական պատկերը համընկնելի է **G** երկրաչափական պատկերին, ապա նաև **G**-ն համընկնելի է **F**-ին (սիմետրիկություն):*
*3). Եթե **F** երկրաչափական պատկերը համընկնելի է **G** երկրաչափական պատկերին և **G** երկրաչափական պատկերը համընկնելի է **H** երկրաչափական պատկերին, ապա **F**-ը համընկնելի է **H**-ին (փոխանցականություն):*

Ելնելով այս հատկություններից՝ «**F** երկրաչափական պատկերը համընկնելի է **G** երկրաչափական պատկերին» արտահայտության փոխարեն կարելի է ասել **«F և G երկրաչափական պատկերները համընկնելի են»**: **F** և **G** երկրաչափական պատկերների համընկնելիությունը նշանակում են այսպես **F ≅ G**: Ցանկացած երկու կետ, ցանկացած երկու ուղիղ, ցանկացած երկու ճառագայթ համընկնելի են: Մենք հաճախակի ենք գործ ունենալու համընկնելի երկրաչափական պատկերների հետ: Այդ հարաբերությունը մեր դասընթացի հիմնական հարաբերություններից է:

Հատվածների հետ իրականացվող հիմնական գործողություններից մեկը **հատվածի տեղադրումն է տրված ճառագայթի գագաթից այդ ճառագայթի վրա**: Եթե **AB** հատվածը **h** ճառագայթի **C** գագաթից այդ ճառագայթի վրա տեղադրելիս ստացվում է **D** երկրորդ ծայրակետով հատված, ապա **AB ≅ CD**: **AB** հատվածի **C** ներքին կետը կոչվում է **AB** հատվածի միջնակետ, եթե **AC ≅ CB** (նկ. **33**):

Նկ. 33

Դիցուք **AB**-ն և **CD**-ն կամայական ոչ համընկնելի հատվածներ են: **CD** ճառագայթի **C** գագաթից այդ ճառագայթի վրա տեղադրենք **AB** հատվածը: Կստանանք ինչ-որ **CF** հատված, որի երկրորդ **F** ծայրակետը չի համընկնում **D** կետին: Ուրեմն հնարավոր է երկու դեպք՝ կա՛մ **F** կետը դասավորված է **C** և **D** կետերի միջև, կա՛մ էլ **D** կետը դասավորված է **C** և **F** կետերի միջև: Առաջին դեպքում կասենք, որ **AB հատվածը փոքր**



Նկ. 34

է CD հատվածից (**AB < CD**) (նկ. **34**), իսկ երկրորդ դեպքում՝ որ **AB հատվածը մեծ է CD հատվածից** (**AB > CD**):

10. Ցանկացած ճառագայթի վրա դրա գագաթից հնարավոր է տեղադրել տրված հատվածին համընկնելի միայն մեկ հատված:

11. Ցանկացած հատված համընկնելի է ինքն իրեն: Եթե երկու հատվածներ առածին-առանձին համընկնելի են երրորդին, ապա այդ հատվածները համընկնելի են:

12. Եթե B կետը դասավորված է A և C կետերի միջև, B' կետը դասավորված է A' և C' կետերի միջև և $A'B' \cong AB$, $B'C' \cong BC$, ապա $A'C' \cong AC$:

Անցնենք երկրաչափության կարևորագույն հասկացություններից մեկի՝ կետերի հեռավորության հասկացությանը: Չափել հատվածը նշանակում է որոշել դրա երկարությունը: Դրա համար օգտագործում են զանազան գործիքներ, այդ թվում՝ քանոն (նկ. **35**), չափերիզ (նկ. **36**), ձողակարկին (նկ. **37**):


Նկ. 35 Քանոն


Նկ. 36 Չափերիզ


Նկ. 37 Ձողակարկին

Հատվածների չափման հիմքը տրված հատվածի համեմատումն է նախապես ընտրված **չափման միավորի** հետ: Այդ միավորի ընտրությունը պայմանական է և կախված է դիտարկվող խնդրի առանձնահատկություններից: Չափման առավել տարածված միավորներից է **մետրը**:

Տարբեր խնդիրներ լուծելիս կարելի է ընտրել չափման տարբեր միավորներ: Օրինակ՝ աստղային հեռավորությունների հետ գործ ունենալիս օգտագործում են **պարսեկներ, մեգապարսեկներ, լուսատարի**: **1** պարսեկը հավասար է **30857000000000000** մետրի, **1** մեգապարսեկը հավասար է **1000000** պարսեկի: **1 լուսատարին** տարածություն է, որը լույսն անցնում է մեկ տարում անօդ տարածության մեջ: Ծովային ճանապարհորդությունների ժամանակ նավապետներն օգտագործել են **ծովային մղոնը** (1 ծովային մղոնը հավասար է **1852** մետրի): Կենդանի բջիջների և քիմիական նյութերի մոլեկուլների կառուցվածքն ուսումնասիրելիս ավելի բնական է օգտագործել համապատասխանաբար **միկրոմետրեր** (նախկինում՝ միկրոններ) և **անգստրեմներ**: **1** մետրը հավասար է **1000000** միկրոմետրի և **10000000000** անգստրեմի:

Հին Հունաստանում չափման հիմնական միավորներից էր ստադիան (1 ստադիան հավասար է մոտավորապես **185** մետրի): Ռուսաստանում օգտագործվել է արշինը (1 արշինը հավասար է **0,7112** մետրի), սաժենը (**1** սաժենը հավասար է **2,1336** մետրի), վերստը (1 վերստը հավասար է 1067 մետրի): Հայաստանում տարբեր ժամանակներում օգտագործվել է **կանգունը** (**1** մետրը հավասար է մոտավորապես **1,877** կանգունի), **ասպարեզը** (**1** ասպարեզը հավասար է մոտավորապես **159,8** մետրի):

Դպրոցական առօրյայում ավելի հաճախ օգտագործում են մետրը, դեցիմետրը (**1** մետրը հավասար է **10** դեցիմետրի) և սանտիմետրը (**1** մետրը հավասար է **100** սանտիմետրի): Մետրը ընտրված է որպես հատվածների չափման (երկարության) ստանդարտ միջազգային միավոր: Այն մոտավորապես հավասար է Երկրագնդի հասարակածի $\frac{1}{40000000}$ մասին: Մետրի նմուշը հատուկ մետաղաձողի տեսքով պահվում է Ֆրանսիայում, Փարիզի մոտակայքում գտնվող Սևր քաղաքի Չափերի և կշիռների միջազգային պալատի Չափերի միջազգային բաժնում:

Գոյություն ունեն նաև չափման այլ միավորներ:

Նշենք ևս մեկ անգամ, որ չափման միավորի ընտրությունը պայմանական է, սակայն եթե ընտրված է չափման միավոր, ապա **ցանկացած հատվածի երկարությունը որոշված է միակ ձևով և արտահայտվում է դրական թվով**: **AB** հատվածի երկարությունը հաճախ անվանում են նաև **A** և **B** կետերի հեռավորություն: Չրոյական հատվածի երկարությունը համարում են հավասար զրոյի: Եթե ընտրված է չափման միավոր, ապա հատվածի երկարությունը օժտված է հետևյալ հատկություններով:

13. Ցանկացած դրական թվի համար գոյություն ունի հատված, որի երկարությունը հավասար է այդ թվին:

14. Համընկնելի հատվածների երկարությունները հավասար են:

15. Եթե B կետը դասավորված է A և C կետերի միջև, ապա AC հատվածի երկարությունը հավասար է AB և BC հատվածների երկարությունների գումարին:

16. Գոյություն ունի հատված, որի երկարությունը հավասար է միավորի:

Աքսիոմ ***14***-ի համաձայն՝ համընկնելի հատվածների երկարությունները հավասար են: Պարզ է, որ եթե **AB** հատվածը մեծ է **CD** հատվածից (**AB > CD**), ապա **AB** հատվածի երկարությունը մեծ է **CD** հատվածի երկարությունից: Համապատասխանաբար **CD** հատվածի երկարությունը փոքր է **AB** հատվածի երկարությունից:

Այսպիսով, համընկնելի հատվածների երկարությունները հավասար են: Մյուս կողմից՝ հավասար երկարություններ ունեցող հատվածները կարող են տարբերվել միայն իրենց դիրքով: Այլ կերպ ասած՝ **հատվածի երկարությունը դրա հիմնական թվային բնութագրիչն է**: Եթե հաշվի է առնվում հատվածի ծայրակետերի կարգը, ապա այդպիսի հատվածն անվանում են **ուղղված հատված**: Վերը ասվածից հետևում է, որ հավասար երկարություններով ցանկացած երկու ուղղված հատվածներ համընկնելի են:

Գործնականում տրված **AB** հատվածի երկարությունը չափելու համար միավոր հատվածը հաջորդաբար տեղադրում են **AB** ճառագայթի **A** գագաթից: Եթե միավոր հատվածը **n** անգամ առանց մնացորդի տեղավորվում է **AB** հատվածում, ապա **AB** հատվածի չափումը դրանով ավարտվում է, և ստացված **n** թիվը համարվում է այդ հատվածի երկարությունը: Դիցուք **n**-րդ տեղադրումից հետո ստացված հատվածի երկրորդ **C** ծայրակետը դասավորված է **A** և **B** կետերի միջև, իսկ (**n + 1**)-րդ տեղադրումից հետո՝ **AB** հատվածից դուրս: Այդ դեպքում **AB** հատվածի երկարությունը դրական թիվ է, որը մեծ է **n**-ից և փոքր է (**n + 1**)-ից: Այդ թիվը ճշտելու համար միավոր հատվածը տրոհում են տասը զույգ առ զույգ համընկնելի մասերի: Այնուհետև այդ տասնե-րորդ մասը տեղադրում են **C** կետից և պարզում, թե քանի անգամ է այդ հատվածը տեղավորվում **CB** հատվածում: Դիցուք այդպիսի **m** տե-ղադրումներից հետո ստացված տասնորդական հատվածի երկրորդ ծայրակետը համընկնում է **B** կետին: Ուրեմն **AB** հատվածի չափումն ավարտվում է և **n, m** տասնորդական թիվը համարվում է **AB** հատվա-ծի երկարությունը: Հնարավոր է, որ **m** տեղադրումներից հետո ստաց-ված տասնորդական հատվածի երկրորդ ծայրակետը նախորդում է **B** կետին, իսկ (**m + 1**)-րդ տեղադրումից հետո հաջորդում **B** կետին: Դա նշանակում է, որ **AB** հատվածի երկարությունը մեծ է **n, m**-ից և փոքր է **n**, (**m + 1**)-ից: Այդ դեպքում միավոր հատվածի տասնորդական մասը տրոհում է տասը զույգ առ զույգ համընկնելի մասերի: Չափման գործընթացը շարունակում են միավոր հատվածի հարյուրերորդա-կան մասի միջոցով: Եթե չափման գործընթացն ավարտվում է ինչ-որ քայլում, ապա **AB** հատվածի երկարությունը վերջավոր տասնորդա-կան կոտորակ է: Իսկ եթե այդ գործընթացը չի ավարտվում վերջավոր թվով քայլերում, ապա **AB** հատվածի երկարությունն արտահայտվում է անվերջ տասնորդական կոտորակով:

Նշենք, որ միավոր հատվածը կարելի է տրոհել ոչ միայն **10** մա-սերի: Օրինակ՝ դիցուք միավոր հատվածը տրոհված է **7** զույգ առ զույգ համընկնելի մասերի, և այդպիսի մի մասը տեղավորվում է **AB** հատվածում, ասենք, **5** անգամ: Այդ դեպքում **AB** հատվածի երկարու-թյունը (կամ, որ նույնն է, **A** և **B** կետերի հեռավորությունը) համարվում է հավասար $\frac{5}{7}$-ի:

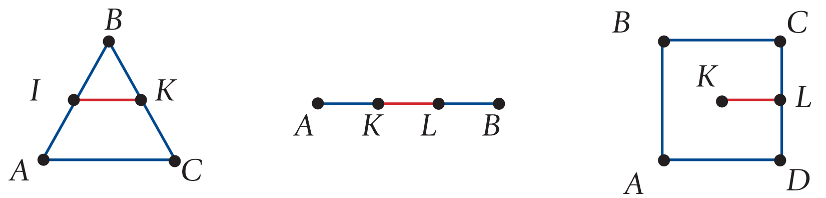
Գործնական առաջադրանքներ

49. Երկարության ո՞ր միավորն է առավել հարմար. ա) դա-սասենյակի, բ) երկրաչափության դասագրքի շապիկի, գ) սեղանի մակերևույթի երկարությունը և լայնությունը չափելու համար:

50. Չափել դասասենյակի երկարությունը և լայնությունը, որոշել, քանի անգամ է դրա երկարությունը մեծ լայնությունից:

51. Չափելով երկրաչափության դասագրքի հաստությունն առանց շապիկի՝ որոշել մեկ էջի հաստությունը:

52. Որոշել նկար **38**-ում պատկերված բոլոր հատվածների երկարությունները, եթե որպես չափման միավոր ընտրված է. ա) **KL**, բ) **AB** հատվածը:



Նկ. 38

53. Գծել **AB** հատված և **h** ճառագայթ: Օգտվելով մասշտաբային քանոնից՝ **h** ճառագայթի վրա դրա գագաթից տեղադրել հատվածներ, որոնց երկարությունները համապատասխանաբար հավասար են **2AB,** $\frac{1}{2}$**AB,** $\frac{1}{4}$**AB**:

54. Գծել ուղիղ և դրա վրա նշել **A** և **B** կետեր: Մասշտաբային քանոնի օգնությամբ նշել **C** և **D** կետեր, այնպես, որ **B** կետը համընկնի **AC** հատվածի միջնակետին, իսկ **D** կետը՝ **BC** հատվածի միջնակետին:

55. Գծել **AB** ուղիղ: Մասշտաբային քանոնի օգնությամբ այդ ուղղի վրա նշել այնպիսի **C** կետ, որ **AC = 2** սմ: Քանի՞ այդպիսի կետ է հնարավոր նշել **AB** ուղղի վրա:

56. Գծել **h** ճառագայթ և **AB** հատված: Ճառագայթի գագաթից դրա վրա տեղադրել **MN, MK, ML** հատվածներ, որոնք համընկնելի են համապատասխանաբար **2AB,**$\frac{1}{2}$**AB,**$\frac{1}{3}$ **AB** հատվածներին:

Հարցեր և խնդիրներ

57. **AB** և **CD** հատվածները հատվում են **O** կետում, ընդ որում՝ **AO** հատվածը երկու անգամ մեծ է **CO** հատվածից, իսկ **OB**

հատվածը երկու անգամ մեծ է **OD** հատվածից: Համեմատել **AB** և **CD** հատվածները:

58. Ուղղի վրա տեղադրված են **AC** և **CB** համընկնելի հատվածներ: **CB** հատվածի վրա ընտրված է այնպիսի **D** կետ, որ **5CD = 4DB**: Որոշել **AC** և **DB** հատվածների միջնակետերի հեռավորությունը, եթե **CD = 12** մ:

59. **B** կետը **AC** հատվածը տրոհում է երկու հատվածների: Որոշել **BC** հատվածի երկարությունը, եթե **AB = 4** սմ, **AC = 4** սմ:

60. **A, B, C** կետերը դասավորված են միևնույն ուղղի վրա: Հայտնի է, որ **AB = 12** սմ, **BC = 13,5** սմ: Ինչպիսի՞ն կարող է լինել **AC** հատվածի երկարությունը:

61. **A** և **B** քաղաքների հեռավորությունը **55** կմ է, իսկ **B** և **C** քաղաքների հեռավորությունը՝ **40** կմ: Որոշել **A** և **C** քաղաքների հնարավոր նվազագույն և առավելագույն հեռավորությունները:

62. **B, D** և **M** կետերը դասավորված են միևնույն ուղղի վրա: Հայտնի է, որ **BD = 7** սմ, **MD = 16** սմ: Ինչպիսի՞ն կարող է լինել **BM** հեռավորությունը:

63. **A, B** և **C** կետերը դասավորված են միևնույն ուղղի վրա, ընդ որում՝ **AB = 16** սմ, **AC = 41** սմ, **BC = 25** սմ: Այդ երեք կետերից ո՞րն է դասավորված մնացած երկու կետերի միջև:

64. **C** կետը **64** սմ երկարությամբ **AB** հատվածի միջնակետն է: **CA** ճառագայթի վրա նշված է այնպիսի **D** կետ, որ **CD = 15** սմ: Որոշել **BD** և **DA** հատվածների երկարությունները:

65. Երկրագնդի հեռավորությունը Արեգակից հավասար է **150000000** կմ, իսկ Լուսնից՝ **300000** կմ: Որոշել Լուսնի և Արեգակի հեռավորությունը Արեգակի լրիվ խավարման ժամանակ, երբ Լուսինը հայտնվում է Արեգակի և Երկրագնդի միջև:

66. Կարո՞ղ են արդյոք **A, B** և **C** կետերը պատկանել միևնույն ուղղի, եթե **AC = 5** սմ, **AB = 3** սմ, **BC = 4** սմ:

Լուծում: Եթե **A**, **B** և **C** կետերը պատկանում են միևնույն ուղղին, ապա **AB, BC** և **AC** հատվածներից ամենամեծի երկարությունը հավասար է մնացած երկուսի երկարությունների գումարին: Տվյալ դեպքում ամենամեծ հատվածն է **AC**-ն, որի երկարությունը **5** սմ է, իսկ **AB** և **BC** հատվածների երկարությունների գումարը հավասար է **7** սմ: Ուրեմն **A, B** և **C** կետերը չեն պատկանում միևնույն ուղղի:

67. **AB** հատվածի երկարությունը հավասար է **14** սմ: **AB** ուղղի վրա նշել բոլոր այն **D** կետերը, որոնց համար **DA = 3DB**:

68. Ուղղի վրա նշված են **O, A** և **B** կետեր այնպես, որ **OA = 12** սմ, **OB = 9** սմ: Որոշել **OA** և **OB** հատվածների միջնակետերի հեռավորությունը, եթե **O** կետը. ա) պատկանում է AB հատվածին, բ) չի պատկանում **AB** ատվածին:

69. **192** սմ երկարությամբ **AB** հատվածի վրա ընտրված է այնպիսի **C** կետ, որ **AC : CB= 1 : 3**, **AC** հատվածի վրա տեղադրված է **CD** հատված, որի երկարությունը հավասար է **BC** հատվածի երկարության **1/12**-ին: Որոշել **AD** և **CB** հատվածների միջնակետերի հեռավորությունը:

70. **28** սմ երկարությամբ հատվածը տրոհված է երեք հատվածների: Եզրային հատվածների միջնակետերի հեռավորությունը հավասար է **16** սմ: Որոշել միջին հատվածի երկարությունը:

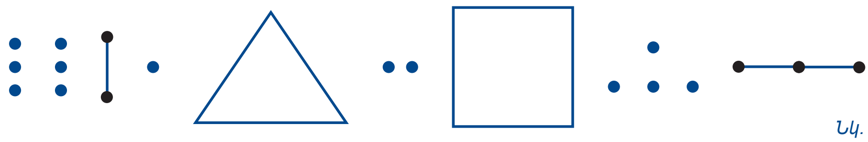
71. **A, B** և **C** կետերը չեն պատկանում **d** ուղղին: Հայտնի է, որ **AB** հատվածը հատում է **d** ուղիղը, իսկ **AC** հատվածը՝ ոչ: Հատո՞ւմ է արդյոք **d** ուղիղը **BC** հատվածը:

72. Տրված հինգ կետերը չեն պատկանում **d** ուղղին, ընդ որում՝ դրանցից երեքը դասավորված են **d** ուղղով որոշվող մի կիսահարթության մեջ, իսկ մնացած երկուսը՝ մյուս կիսահարթության մեջ: Այդ հինգ կետերով որոշվող բոլոր հատվածներից քանի՞սն են հատում **d** ուղիղը:

73. Հիմնավորել, որ հավասար երկարություններով ցանկացած երկու ուղղված հատվածներ համընկնելի են:

74. **M** կետը **AB** հատվածի միջնակետն է, **N** կետը՝ **BC** հատվածի միջնակետը: **A, B, C** կետերի ինչպիսի՞ դասավորության դեպքում է **MN** հատվածի միջնակետը համընկնում **AC** հատվածի միջնակետին:

75. Արտանկարել նշված պատկերները տետրում այնպես, որ առաջանա օրինաչափություն:



Նկ. 39

76. **A, B, C, D** կետերը պատկանում են միևնույն ուղղի, ընդ որում՝ **B** կետը դասավորված է **A** և **C** կետերի միջև, և **AB** ≅ **CD**: Ճշմարի՞տ է արդյոք, որ **BC** հատվածի միջնակետը միաժամանակ **AD** հատվածի միջնակետն է:

Նկ. 40

77. Նկար **40**-ում **AB, BC, CD, DE** հատվածները զույգ առ զույգ համընկնելի են: Նշել. ա) **AC, AE, CE** հատվածների միջնակետերը, բ) հատված, որի միջնակետը համընկնում է **D** կետին, գ) **C** ընդհանուր միջնակետով հատվածները:

78. **M** և **N** կետերը **AB** հատվածի ներքին կետեր են, ընդ որում՝ **AM, MN, NB** հատվածները զույգ առ զույգ համընկնելի են: Ճշմարի՞տ է արդյոք, որ **MN** հատվածի միջնակետը համընկնում է **AB** հատվածի միջնակետին:

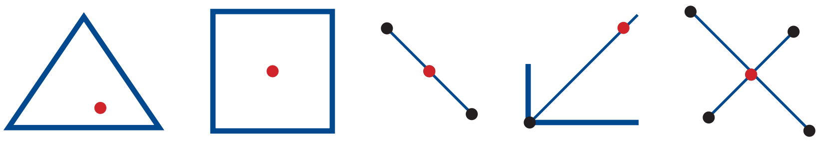
79. Համեմատել հետևյալ երկու պնդումը:

Ցանկացած հատված հնարավոր է ներկայացնել երկու ճառագայթների հատման տեսքով:	Ցանկացած ուղիղ հնարավոր է ներկայացնել երկու ճառագայթների միավորման տեսքով:

Ի՞նչ կարելի է պնդել դրանց ճշմարտացիության մասին: Ներկայացնել համապատասխան միավորումը: Պատասխանը քննարկել համադասարանցիների հետ:

80. Ինչպես հայտնի է, Արեգակնային համակարգի մոլորակները պտտվում են Արեգակի շուրջ: Երկրագնդի և Մարսի նվազագույն հեռավորությունը մոտավորապես հավասար է **55** միլիոն կիլոմետրի, Երկրագնդի և Վեներայի նվազագույն հեռավորությունը՝ **47** միլիոն կիլոմետրի: Որքա՞ն կարող է լինել Վեներայի և Մարսի նվազագույն հեռավորությունը, եթե հայտնի է, որ այդ երեք մոլորակներից Վեներան առավել մոտ է Արեգակին, իսկ Մարսը՝ առավել հեռու:

81. Արտանկարել սույն նկարը տետրում, որոշել օրինաչափությունը և հեռացնել ավելորդ երկրաչափական պատկերը:



Նկ. 41

82. Նախորդ առաջադրանքի պատկերները արտանկարել՝ օգտագործելով **Paint** ծրագիրը, հեռացնել ավելորդ երկրաչափական պատկերը:

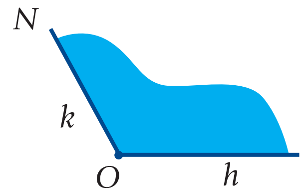
83. **A, B, C** կետերը չեն պատկանում միևնույն **d** ուղղին, ընդ որում՝ **AB** հատվածը հատում է **d** ուղիղը, իսկ **AC** հատվածը՝ ոչ: Հատո՞ւմ է արդյոք **d** ուղիղը **BC** հատվածը:

84. Տրված հինգ կետերը չեն պատկանում **d** ուղղին, ընդ որում՝ դրանցից երեքը դասավորված են **d** սահմանով միևնույն կիսահարթության մեջ, իսկ մնացած երկուսը՝ մյուս կիսահարթության մեջ: Այդ ծայրակետերով քանի՞ հատված է հատում **d** ուղիղը:

85. **B** կետը դասավորված չէ **A** և **C** կետերի միջև: Ի՞նչ կարելի պնդել **AB, AC, BC** հատվածների երկարությունների մասին:

§5. ԱՆԿՅՈՒՆ

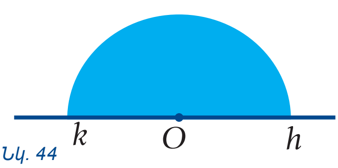
Պարզագույն երկրաչափական պատկերների, այն է՝ կետերի և ուղիղների միջոցով մենք կառուցեցինք նոր պատկերներ՝ հատվածներ և ճառագայթներ: Այժմ ներմուծենք ավելի բարդ երկրաչափական պատկեր: Դիտարկենք **O** ընդհանուր գագաթով **h, k** երկու ճառագայթների և դրանց գագաթի միավորումը (նկ. **42**)։ Այն տրոհում է հարթության բոլոր այն կետերի ենթաբազմությունը, որը չի պարունակում այդ միավորման կետե-րը, երկու ենթաբազմության։ Դրանցից մեկն ուռուցիկ է։ Այդ ենթաբազմությու-նը **h, k** ճառագայթների և **O** կետի հետ միասին կոչվում է **անկյուն** (նկ. 42)։



Նկ. 42

O կետը կոչվում է **անկյան գագաթ**, իսկ **h**, **k** ճառագայթները՝ **O** կետի հետ միյասին **անկյան կողմեր**։ Նկար **42**-ում պատկերված է **O** գագաթով և **h, k** կողմերով **Ohk** անկյունը։ Եթե այդ անկյան կողմերի վրա նշված են համապատասխանաբար **M** և **N** կետեր, ապա անկյունը հաճախ ավելի հարմար է նշանակել ∠ **MON**։ Երբեմն կիրառում են նաև ∠ **1**, ∠ **2**, ∠ **3**, **…** նշանակումները։

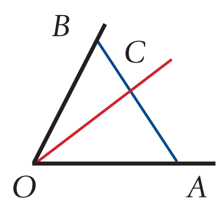
Նկ. 43



Նկ. 44

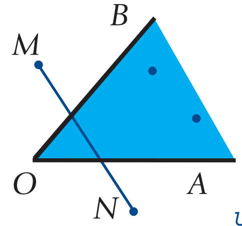
Եթե անկյան կողմերը, այսինքն՝ **Oh** և **Ok** ճառագայթները համընկնում են, ապա անկյունը կոչվում է **զրոյական անկյուն** (նկ. 43)։ Եթե ոչ զրոյական անկյան կողմերը պատկանում են միևնույն ուղղին, ապա անկյունը կոչվում է **փռված անկյուն** (նկ. **44**)։ Երբեմն ասում են, որ փռված անկյան յուրաքանչյուր կողմը մյուսի շարունակությունն է։ Ասում են նաև, որ փռված անկյան կողմերը լրացուցիչ ճառագայթներ են։ Պարզ է, որ փռված անկյուն կազմում են ընդհանուր գագաթով երկու հակադիր ճառագայթներ (ներառյալ գագաթը)։ Նշենք ևս մեկ անգամ, որ և՛ անկյան գագաթը, և՛ դրա կող-մերի կետերը պատկանում են անկյանը։ Անկյան կետը, որը տարբեր է գագաթից և չի պատկանում դրա կողմերին, կոչվում է **անկյան ներքին կետ**։ Անկյան ներքին կետերի բազմությունը անվանում են **անկյան ներքին տիրույթ** (նկ. **45**)։

Դիցուք **A** և **B** կետերը պատկանում են **O** գագաթով անկյան տարբեր կողմերի, ընդ որում՝ դրանցից յուրաքանչյուրը տարբեր է գագաթից։ Այդ դեպքում **AB** հատվածի բոլոր ներքին կետերը պատկանում են այդ անկյան



Նկ. 45

ներքին տիրույթին: Ուրեմն անկյան ներքին տիրույթն ընդգրկում է անթիվ բազմությամբ կետեր, և անկյունը ու դրա ներքին տիրույթը ուռուցիկ երկրաչափական պատկերներ են (նկ. **45**): Գործնականում անկյան ներքին տիրույթը որոշելու համար բավական է նշել դրա կետերից որևէ մեկը: Դրա համար ընտրում են հատված, որի ծայրակետերը պատկանում են անկյան տարբեր կողմերին, և այդ հատվածի որևէ ներքին կետ: Պարզ է, որ այդ կետը պատկանում է անկյան ներքին տիրույթին: Հարթության բոլոր այն կետերի բազմությունը, որոնք չեն պատկանում տրված անկյանը, կոչվում է **անկյան արտաքին տիրույթ**: Եթե անկյունը ուռուցիկ երկրաչափական պատկեր է, ապա դրա արտաքին տիրույթը, որպես կանոն, ոչ ուռուցիկ պատկեր է: Նկար **46**-ում **M** և **N** կետերը պատկանում են ∠**AOB**-ի արտաքին տիրույթին: **MN** հատվածի ոչ բոլոր կետերն են պատկանում այդ տիրույթին, ուստի այն ուռուցիկ չէ: Փռված անկյան դեպքում դրա կողմերը դասավորված են միևնույն ուղղի վրա, վերջինս որոշում է երկու կիսահարթություն: Դրանցից ցանկացածը հնարավոր է համարել փռված անկյան ներքին տիրույթ: Ուրեմն փռված անկյան դեպքում (և միայն այդ դեպքում) անկյան արտաքին տիրույթը ևս ուռուցիկ պատկեր է: Անկյունները օժտված են հետևյալ հատկություններով:



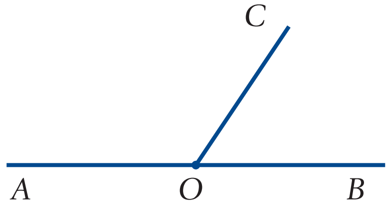
Նկ. 46

17. Ցանկացած անկյուն համընկնելի է ինքն իրեն:

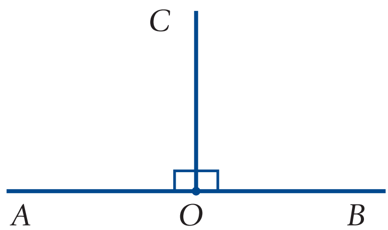
18. Նույն անկյանն առանձին-առանձին համընկնելի երկու անկյունները համընկնելի են:

19. Ցանկացած երկու փռված անկյուններ համընկնելի են:

20. Հարթության տրված ուղղի տրված կետում այդ ուղղով որոշվող կիսահարթություններից յուրաքանչյուրում հնարավոր է տեղադրել տրված անկյանը համընկնելի միակ անկյուն: Դրա գագաթը համընկնում է այդ կետին, իսկ մի կողմը դասավորված է այդ ուղղի վրա:



Նկ. 47

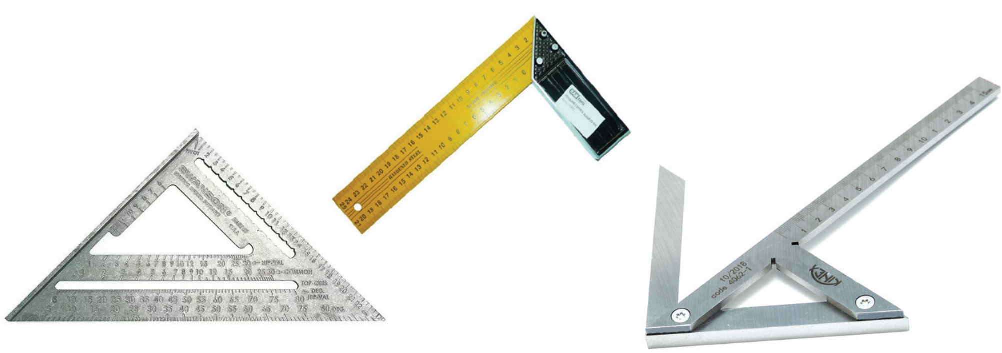


Նկ. 48

Վերջին հատկությունից հետևում է, որ նույն տեղադրումը հնարավոր է կատարել նաև տրված ճառագայթի համար:

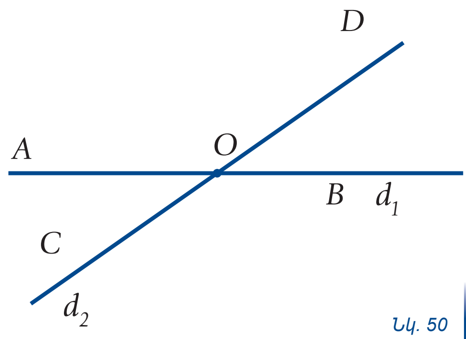
Անկյան ներքին տիրույթով անցնող ճառագայթը, որի գագաթը համընկնում է այդ անկյան գագաթին, տրոհում է այդ անկյունը երկու անկյունների: Օրինակ՝ նկար **47**-ում **OC** ճառագայթը անկյուն **AOB**-ն տրոհում է **AOC** և **COB** անկյունների:

Դիցուք ∠**AOB**-ն փռված անկյուն է, իսկ **OC** ճառագայթն այն տրոհում է ∠**AOC**-ի և ∠**COB**-ի (նկ. **47**): Այդ դեպքում կասենք, որ **AOC** և **COB** անկյունները **կից անկյուններ** են: Կարող ենք ասել նաև, որ կից անկյուններն ունեն մեկ ընդհանուր կողմ (**OC**): Ըստ որում՝ դրանցից մեկի երկրորդ կողմը մյուսի երկրորդ կողմի շարունակությունն է: Եթե կից անկյունները համընկնելի անկյուններ են, ապա այդ անկյուններից յուրաքանչյուրը կոչվում է **ուղիղ անկյուն** (նկ. **48**): Ուղիղ անկյուն են կազմում, օրինակ, դպրոցական սեղանի մակերևույթի, ֆուտբոլային դաշտի, դասագրքի եզրերը: Շինարարության մեջ օգտագործում են զանազան գործիքներ, որոնց միջոցով կառուցում են ուղիղ անկյուններ կամ ստուգում արդեն կառուցված անկյան կողմերը: Այդ գործիքների մի մասն անվանում են **անկյունարդներ** (նկ. **49**):



Նկ. 49 Սվենսոնի անկյունարդ: Շինարարական անկյունարդներ

Եթե **d_1** և **d_2** ուղիղները հատվում են **O** կետում (նկ. **50**), ապա առաջանում է **O** ընդհանուր գագաթով չորս ճառագայթ՝ **OA, OB, OC, OD,** ընդ որում՝ **OA** և **OB, OC** և **OD** ճառագայթները դասավորված են միևնույն ուղղի վրա: Այլ կերպ ասած՝ **AOC** և **BOD, AOD** և **BOC** անկյունների կողմերը լրացնում են մեկը մյուսին **AB** և **CD** ուղիղների վրա: Այդպիսի **AOC** և **BOD, AOD** և **BOC** անկյունները կոչվում են **ուղղաձիգ անկյուններ**: Ուղղաձիգ անկյուններն ունեն նույն կից անկյունը, օրինակ՝ նկար **50**-ում **AOC** և **BOD** ուղղաձիգ անկյունների կից անկյունը **BOC** (կամ **AOD**) անկյունն է:

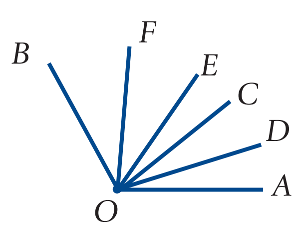


Նկ. 50

Ինչպես տեսնում ենք, անկյունը (ուղղին և ճառագայթին հանգունորեն) անսահմանափակ երկրաչափական պատկեր է, ուրեմն անկյունների չափերի մասին խոսելն ավելորդ է: Անկյան հիմնական նկարագիրը կապված է դրա ձևի հետ:

Գործնական առաջադրանքներ և հարցեր

86. Կառուցել ուղիղ, դրա վրա նշել **A** և **B** կետեր, **AB** հատվածի վրա նշել **C** կետ: ա) **AB, BC, CA, AC** և **BA** ճառագայթների մեջ առանձնացնել համընկնող ճառագայթների զույգերը, բ) նշել այն ճառագայթը, որը **CA** ճառագայթի շարունակությունն է:



Նկ. 51

87. Գծել երեք ոչ փռված անկյուններ և նշանակել դրանք **∠AOB**, **∠hk, ∠M**:

88. Գծել երկու փռված անկյուններ և նշանակել դրանք տառերով:

89. Նշել նկար **51**-ում պատկերված բոլոր անկյունները:

90. Գծել ոչ փռված **hk** անկյուն: Դրա գագաթից գծել երկու ճառագայթ: Քանի՞ անկյուն ստացվեց:

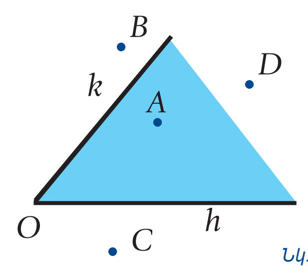
91. Գծել ոչ փռված անկյուն: Նշել **A, B, M** և **N** կետեր այնպես, որ **AB** հատվածի բոլոր կետերը պատկանեն անկյան ներքին տիրույթին, իսկ **MN** հատվածի բոլոր կետերը՝ անկյան արտաքին տիրույթին:

92. Տրված են միևնույն ուղղի չպատկանող երեք կետեր: Կառուցել անկյուններ, որոնց կողմերը պարունակում են այդ կետերից երկուսը, իսկ գագաթը համընկնում է երրորդ կետին: Քանի՞ անկյուն ստացվեց:

93. Գծել **AOB** ոչ փռված անկյուն և կառուցել. ա) **OC** ճառագայթ, որը անկյուն **AOB**-ն տրոհում է երկու անկյունների, բ) **OD** ճառագայթ, որը անկյուն **AOC**-ն չի տրոհում երկու անկյունների:

94. Քանի՞ ոչ փռված անկյուն է առաջանում երկու ուղիղների հատման դեպքում:

95. Նկար **52**-ում պատկերված կետերից որո՞նք են դասավորված **hk** անկյան ներքին, իսկ որոնք՝ արտաքին տիրույթում:

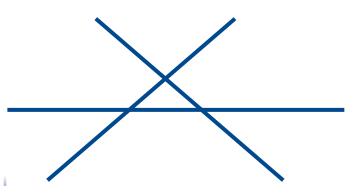


Նկ. 52

96. Քանի՞ ուղիղ է անհրաժեշտ գծել տրված կետում, որպեսզի ստացվի վեց անկյուն:

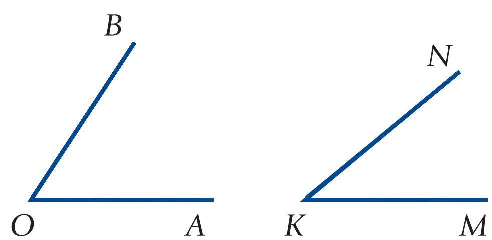
97. Քանի՞ փռված և ոչ փռված անկյուններ են պատկերված նկար **53**-ում:

98. Տրված է **PQR** ոչ փռված անկյունը: **Q** գագաթից գծել ճառագայթներ այնպես, որ առաջանան վեց անկյուններ, որոնցից մեկը լինի փռված անկյուն:

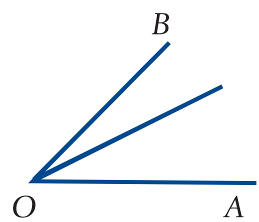

Նկ. 53

§6. ԱՆԿՅՈՒՆՆԵՐԻ ՀԱՄԵՄԱՏՈՒՄ: ԱՆԿՅԱՆ ՄԵԾՈՒԹՅՈՒՆ, ԱՆԿՅՈՒՆՆԵՐԻ ՉԱՓՈՒՄ

Կիրառենք ներմուծված հասկացությունները՝ անկյունները համեմատելու համար: Վերցնենք երկու ոչ փռված ∠**AOB**-ն և ∠**MKN**-ը (նկ. **54**): Օգտվելով հատկություն **18**-ից՝ **OA** ուղղի այն կողմում, որում դասավորված է **B** կետը, **O** կետից տեղադրենք **MKN** անկյանը

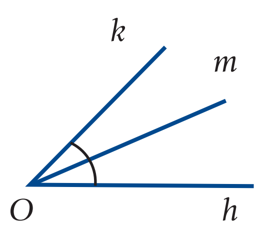


Նկ. 54



Նկ. 46

համընկնելի **AOC** անկյունը (նկ. 55): Եթե **OC** ճառագայթն անցնում է **AOB** անկյան ներքին տիրույթով, ապա ասում են, որ **AOB անկյունը մեծ է MKN անկյունից՝ ∠AOB > ∠MKN**: Եթե հակառակը՝ **OB** ճառագայթն է անցնում **AOC** անկյան ներքին տիրույթով, ապա ասում են, որ **AOB անկյունը փոքր է MKN անկյունից՝ ∠AOB < ∠MKN**: Առաջին դեպքում կարող ենք ասել նաև, որ **∠MKN < ∠AOB**, իսկ երկրորդ դեպքում՝ **∠MKN > ∠AOB**: Բնականաբար մենք չենք քննարկում այն դեպքը, երբ **OB** և **OC** ճառագայթները համընկնում են, դա **AOB** և **MKN** անկյունների համընկնելիության դեպքն է: Պարզ է, որ ցանկացած ոչ փռված անկյուն փոքր է ցանկացած փռված անկյունից (նկ. **50**): Պարզ է, որ անկյունների մեծությունների անհավասարության հարաբերությունը անդրադարձական չէ, սիմետրիկ չէ, սակայն փոխանցական է. եթե **∠AOB < ∠MKN** և **∠MKN < ∠PQR**, ապա **∠AOB < ∠PQR**: Անկյան ներքին ճառագայթը (գագաթի հետ միասին), որն այդ անկյունը տրոհում է երկու համընկնելի անկյունների, կոչվում է այդ **անկյան կիսորդ**: Յուրաքանչյուր ոչ զրոյական անկյուն ունի մեկ անկյան կիսորդ: Նկար **56**-ում **Om** ճառագայթը (**O** գագաթի հետ



Նկ. 56

միասին) **Ohk** անկյան կիսորդն է: Կառուցելով **Ohm** անկյան կիսորդը և շարունակելով այդ գործընթացը՝ կգանք հետևյալ հատկությանը:

21. Ցանկացած անկյուն հնարավոր է տրոհել n զույգ առ զույգ համընկնելի մասերի, որտեղ n-ը մեկից մեծ կամայական բնական թիվ է:

Նշենք, որ երկրաչափական պատկերների համեմատումը կատարվում է միայն միատեսակ պատկերների դեպքում: Օրինակ՝ անիմաստ է անկյունը համեմատել հատվածի հետ: Այլ կերպ ասած՝ համեմատվում են միայն նույն ձևի պատկերները: Այստեղից մասնավորապես հետևում է, որ երկրաչափության մեջ երկրաչափական պատկերի ձևը ավելի կարևոր է, քան դրա չափսերը:

Անկյունների չափման գաղափարը համանման է հատվածների չափման գաղափարին: Այստեղ նույնպես որպես չափման միավոր ընտրում են որոշակի անկյուն և յուրաքանչյուր անկյուն համեմատում դրա հետ: Սակայն հատվածների չափման դեպքում միավոր հատվածի ընտրությունը միանգամայն կամայական է և շատ դեպքերում կախված է լուծվող խնդրի առանձնահատկություններից: Դրան հակառակ՝ միավոր անկյունը որոշվում է բնական եղանակով և այդ պատճառով միասնական է: Որպես անկյունների չափման միավոր՝ սովորաբար ընտրում են **1 աստիճանը**, որը փռված անկյան $\frac{1}{180}$-րդ մասի մեծությունն է: Ուրեմն փռված անկյան մեծությունը **180** աստիճան է, իսկ ցանկացած ոչ փռված անկյան մեծությունը փոքր է **180** աստիճանից: Աստիճան բառն այս ենթատեքստում լատիներեն թարգմանվում է որպես **gradus**, որը նշանակում է «քայլ»: Անկյունների չափման այդ միավորը հայտնի էր դեռ մեր թվարկությունից առաջ, սակայն դրա ընտրության պատճառը հայտնի չէ: Գոյություն ունի մի քանի լեգենդ դրա վերաբերյալ: Դրանցից մեկի համաձայն՝ Բաբելոնի քրմերը նկատել էին, որ ամռանը Արեգակի սկավառակը **180** անգամ տեղավորվում է կիսաշրջանագծի մեջ, որը մեկ օրվա ընթացքում անցնում է մեր աստղը՝ կարծես թե կատարելով **180** քայլ: Աստիճանի $\frac{1}{60}$-րդ մասն անվանում են **րոպե**, իսկ րոպեի $\frac{1}{60}$-րդ մասը՝ **վայրկյան**: Այդպիսի ընտրությունը բացատրվում է նրանով, որ Բաբելոնում ընդունված էր հաշվման **60**-ական թվային համակարգը: Այն դրական թիվը, որը ցույց է տալիս, թե քանի անգամ են մեկ աստիճանը և դրա մասերը տեղավորվում տրված ոչ զրոյական անկյան մեջ, կոչվում է այդ **անկյան աստիճանային չափ (կամ նակյան մեծություն)**: Եթե անկյան աստիճանային չափը **20** աստիճան, **15** րոպե, **38** վայրկյան է, ապա կարճ գրառում են **20°15’38’’**: Բավական հաճախ «տրված անկյան աստիճանային չափը α է» բառակապակցության փոխարեն օգտագործում են «տրված անկյունը ներառում է α անկյուն»: Այդ պատճառով օգտագործում են α **= 120°** գրելաձևը: Դա նշանակում է, որ համապատասխան անկյան աստիճանային չափը **120°** է: Անցնենք անկյունների աստիճանային չափի հիմնական հատկություններին:

22. Համընկնելի անկյունների աստիճանային չափերը հավասար են:

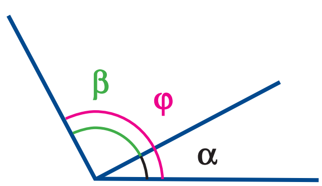
23. Ցանկացած 0 ≤ α ≤ 180 թվի համար գոյություն ունի անկյուն, որի աստիճանային չափը հավասար է α-ի:

24. Ավելի փոքր անկյունն ունի ավելի փոքր աստիճանային չափ:

25. Անկյան աստիճանային չափը հավասար է այդ անկյան ներքին ճառագայթով որոշվող երկու անկյունների աստիճանային չափերի գումարին:

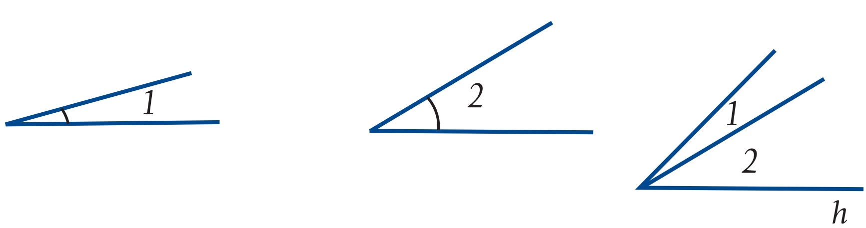
Այսպիսով, անկյան աստիճանային չափն այդ երկրաչափական պատկերի հիմնական թվային բնութագրիչն է:

Նկար **57**-ում պատկերված է ճառագայթ, որով φ անկյունը տրոհվում է α և β անկյունների, ընդ որում՝ α = 30°, β = 90°, φ = 120° և ուրեմն φ = α + β:



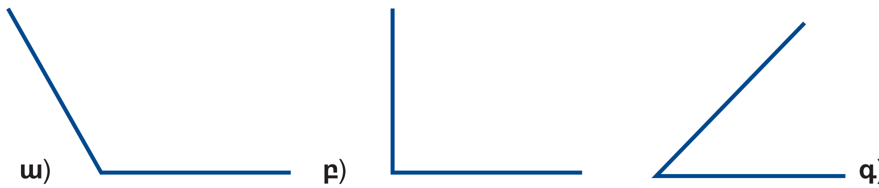
Նկ. 57

Հատկություն **23°**-ից հետևում է, որ ընդհանուր գագաթով բոլոր անկյունների բազմության մեջ հնարավոր է սահմանել անկյունների մեծությունների գումարման գործողություն: Իրոք, ենթադրենք



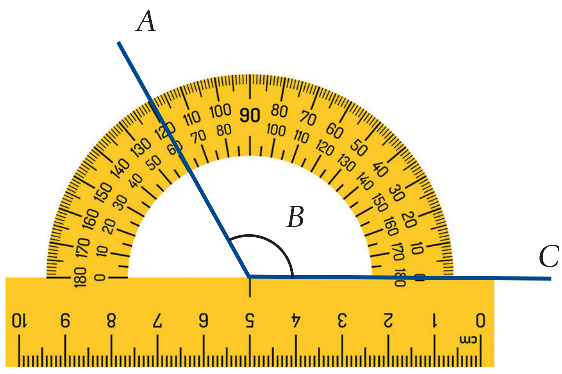
Նկ. 58

տրված է երկու անկյուն՝ ∠**1** և ∠**2**: Օգտվենք հատկություն **18°**-ից, ընտրենք որևէ **h** ճառագայթ, դրա վրա կառուցենք ∠**1**-ին համընկնելի անկյուն, այնուհետև նույն գագաթում այդ անկյան երկրորդ կողմի վրա կառուցենք ∠**2**-ին համընկնելի անկյուն, ընդ որում՝ ∠**1**-ի երկրորդ կողմը ընդգրկում է կառուցված անկյան ներքին ճառագայթ (նկ. **58**): Հին Հունաստանում ստացված անկյունն անվանում էին ∠**1**-ի և ∠**2**-ի գումար, և դրան համապատասխան՝ ոմանք այն ներկայացնում են ∠**1** **+** ∠**2** տեսքով, որը չի համապատասխանում երկրաչափական պատկերների մասին ժամանակակից պատկերացումներին: Իհարկե, ժամանակակից երկրաչափության տեսանկյունից խոսքը անկյունների միավորման մասին է, գումարման հանրահաշվական նշանն այստեղ տեղին չէ: Սակայն անկյունը լիովին որոշվում է աստիճանային չափով, այսինքն՝ նույն աստիճանային չափի երկու անկյուններ համընկնելի են: Այդ դեպքում ∠**1** **+** ∠**2** գրելաձևը նշանակում է ∠**1**-ի և ∠**2**-ի աստիճանային չափերի գումարում, որն արտահայտում է ընդհանուր կողմով երկու անկյունների միավորման բովանդակությունը, այնպես, որ ∠**1** **+** ∠**2** արտահայտությունը անհրաժեշտ է հասկանալ միայն այդ իմաստով:



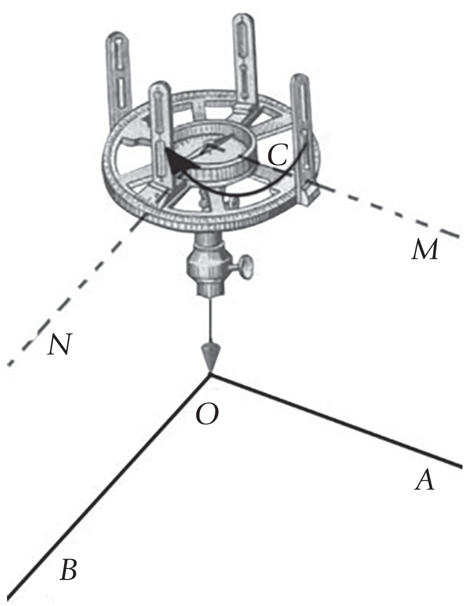
Նկ. 59

Պարզ է, որ ուղիղ անկյան աստիճանային չափը **90°** է (նկ. **59, բ**): Անկյունը կոչվում է **սուր անկյուն**, եթե դրա աստիճանային չափը փոքր է **90°**-ից (նկ. **59, գ**) և **բութ անկյուն**, եթե այդ չափը մեծ է **90°**-ից, սակայն փոքր **180°**-ից (նկ. **59, ա**): Ուրեմն բութ անկյունը մեծ է սուր և ուղիղ անկյուններից, սակայն փոքր է փռված անկյունից: Ուղիղ անկյան կողմերը պարունակող ուղիղները անվանում են **ուղղահայաց ուղիղներ**: Գործնականում անկյուններ չափելու համար օգտագործում են տարբեր գործիքներ: Դրանցից պարզագույնը անկյունաչափն է (նկ. **60**): Այն ընդգրկում է պատուհան, որի հիմքը հատված է, իսկ վերին մասը՝ կիսաշրջանագիծ: Անկյունը չափելու համար դրա մի կողմը համընկեցնում են անկյունաչափի հորիզոնական հատվածին, ընդ որում՝



Նկ. 60

այդ հատվածի միջնակետում տեղադրում են անկյան գագաթը: Անկյան երկրորդ կողմն անցնում է կիսաշրջանագծի կետով, որում նշված է անկյան մեծությունը: Նկար **60**-ում պատկերված անկյան մեծությունը **120°** է: Տեղանքում անկյունների չափումը կատարում են մի շարք հատուկ գործիքների միջոցով, որոնցից պարզագույնը **աստրոլաբն** է (նկ. **61**): Այն ընդգրկում է հորիզոնական շրջանաձև սկավառակ, որի վրա նշված են անկյունային բաժանումներ, և այդ սկավառակի կենտրոնի շուրջ պտտվող ուղղաձիգ քանոն (ալիդադ): Տեղանքում անկյան մեծությունը չափելու համար նախ այդ գործիքի ուղղալարը ճշգրիտ տեղադրում են անկյան **O** գագաթի վրա, իսկ ալիդադը ուղղում են անկյան կողմերից մեկի երկայնքով (**AOB** անկյան **OA** կողմի ուղղությամբ) (**CM** ուղղություն)՝ գրանցելով սկավառակի համապատասխան ցուցումը: Այնուհետև ալիդադը պտտում են ժամացույցի սլաքի շարժման ուղղությամբ մինչև անկյան երկրորդ կողմի **OB** ուղղությանը համընկնելը (**CN** ուղղությունը սկավառակի վրա) և գրանցում սկավառակի համապատասխան ցուցումը: Այդ երկու ցուցումների տարբերությունը հավասար է **AOB** անկյան մեծությանը: Համանման մոտեցում օգտագործում են զանազան երկնային մարմինների փոխադարձ դասավորությունը որոշելու համար, միայն թե այդ դեպքում կիրառվում են լազերային սարքեր:



Նկ. 61

Գործնական առաջադրանքներ և հարցեր

99. Ի՞նչն է պատճառը, որ անկյան սահմանման մեջ անկյան գագաթը վերագրում են այդ անկյանը: Ի՞նչ տեղի կունենա, եթե անկյան գագաթը արտաքսվի անկյանը պատկանող կետերի բազմությունից:

100. Նշել երկրաչափական հատկություն, որով օժտված են և՛ հատվածը, և՛ անկյունը: Նշել հատվածի և անկյան էական տարբերությունը:

101. Ինչպե՞ս գործնականում պարզել անկյունը սուր է, ուղիղ, թե բութ:

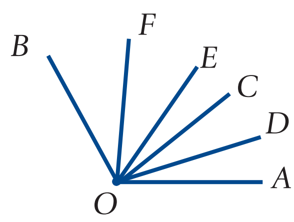
102. Սահմանել անկյան արտաքին տիրույթի կետի և անկյան արտաքին տիրույթի հասկացությունները:

103. **A** և **B** կետերը պատկանում են անկյան. ա) ներքին, բ) արտաքին տիրույթին: Ինչպե՞ս է դասավորված **AB** հատվածը այդ անկյան նկատմամբ:

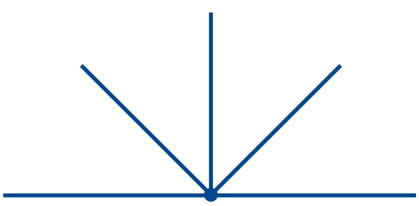
104. Ճշմարի՞տ է արդյոք, որ անկյան կիսորդը ճառագայթ է, որն անցնում է այդ անկյան գագաթով և տրոհում է այն երկու համընկնելի անկյունների: Պատասխանը քննարկել համադասարանցիների հետ:

105. Ի՞նչ տեսակի անկյուններ է առաջացնում ոչ փռված անկյան կիսորդը:

106. Նկար **62**-ում նշել համընկնելի անկյունների բոլոր զույգերը: Նշել. ա) **AOC, BOF, AOE** անկյունների կիսորդները, բ) բոլոր այն անկյունները, որոնց համար **OC** ճառագայթը անկյան կիսորդ է:



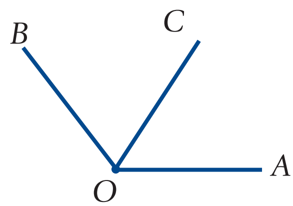
Նկ. 62



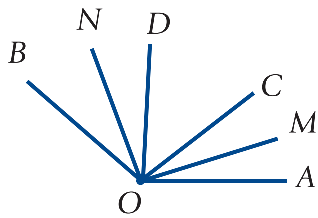
Նկ. 63

107. Նկար **63**-ում նշել համընկնելի անկյունների բոլոր զույգերը:

108. Նկար **64**-ում **OC** ճառագայթը **AOB** անկյան կիսորդն է: Գծել այնպիսի **OD** ճառագայթ, որ **AOC** ≅ **DOB**:



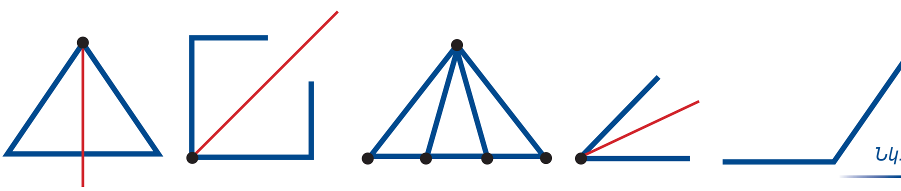
Նկ. 64



Նկ. 65

109. Նկար **65**-ում **AOB** անկյան **OM** և **ON** ներքին ճառագայթները համապատասխանաբար **AOC** և **DOB** անկյունների կիսորդներն են: Համեմատել **AOB** և **MON** անկյունների կիսորդները:

110. Արտանկարել տրված երկրաչափական պատկերները տետրում և լրացնել բացակայող տարրերը:



Նկ. 65

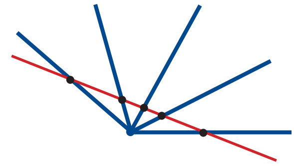
111. Անկյունաչափի միջոցով չափել. ա) գծագրական եռանկյան, բ) Սվենսոնի անկյունարդի անկյունները և գրանցել չափումների արդյունքները:

112. Գծել **OA** ճառագայթը և անկյունաչափի օգնությամբ **OA** ճառագայթից տեղադրել **AOB, AOC** և **AOD** անկյուններ այնպես, որ **∠AOB = 23°, ∠AOC = 67°, ∠AOD = 138°**:

113. Անկյունաչափի միջոցով գծել **70°** անկյուն և կառուցել դրա կիսորդը:

114. Անկյունաչափի միջոցով կառուցել **60°** անկյուն և այն տրոհել երեք զույգ առ զույգ համընկնելի անկյունների:

115. Գծել ճառագայթ և դրա գագաթից տրված կիսահարթության մեջ կառուցել մի քանի անկյուն, այդ թվում՝ երկու սուր, ուղիղ և բութ անկյուն: Գծել նաև **a** ուղիղ, որը չի անցնում այդ անկյունների ընդհանուր գագաթով, սակայն հատում է դրանց բոլոր կողմերը (նկ. **66**): Համեմատել այդ անկյունների մեծությունները և այդ անկյունների կողմերից **a** ուղղով անջատված հատվածների երկարությունները: Գոյություն ո՞ւնի այդ անկյունների աստիճանային չափերի և այդ հատվածների երկարությունների որևէ կապ:



Նկ. 66

116. Ինչպե՞ս առանց անկյունաչափի համեմատել երկու անկյուն: Նկարագրել համեմատման գործընթացը:

Հարցեր և խնդիրներ

117. Երկու անկյունների աստիճանային չափերը հավասար են: Համընկնելի՞ են արդյոք այդ անկյունները:

118. Ինչպե՞ս ստուգել երկու անկյունների համընկնելիությունը:

119. Ապացուցել, որ ուղղաձիգ անկյունները համընկնելի են:

120. $\angle$**ABC = 80°**: **BD** ճառագայթն այդ անկյունը տրոհում է այնպիսի երկու անկյունների, որ $\angle$**ABD = 4**$\angle$**DBC**: Որոշել այդ անկյունների աստիճանային չափերը:

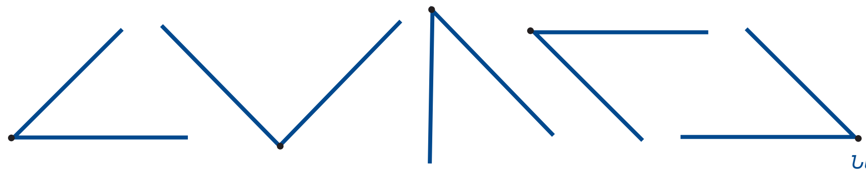
121. **O** գագաթով ճառագայթի վրա նշված են **A, B** և **C** կետեր այնպես, որ **B** կետը դասավորված է **O** և **A** կետերի, իսկ **A** կետը՝ **O** և **C** կետերի միջև: Համեմատել **OB** և **OA**, **OC** և **OA**, **OB** և **OC** հատվածները:

122. Որ հասիմաներում է փոսթխվում սուր անկյան մեուղյունը:

123. **A, B, C, D** կետերը պատկանում են միևնույն ուղղի, ընդ որում՝ **C** կետը դասավորված է **A** և **B** կետերի միջև և **AB** ≅ **CD**: Ճշմարի՞տ է արդյոք, որ **AD** հատվածի միջնակետը նաև **BC** հատվածի միջնակետն է:

124. Օգտագործելով անկյունաչափը և քանոնը՝ նախ կառուցել $\angle$**A = 60°**, այնուհետև այդ անկյան կողմերի վրա նշել այնպիսի **B, C** կետեր, որ տեղի ունենան **AB = 4** սմ, **AC = 5** սմ պայմանները:

125. Օգտագործելով անկյունաչափը՝ կառուցել անկյուն, որի աստիճանային չափն է. ա) **90°**, բ) **45°**, ց **120°**, դ) **60°**:



Նկ. 66

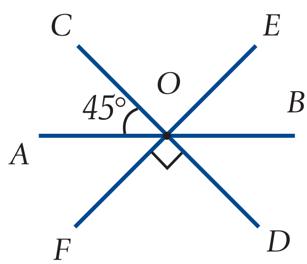
126. Նշված երկրաչափական պատկերներից ո՞րն է «ավելորդ»: Արտանկարել այդ պատկերները տետրում՝ փոխարինելով «ավելորդը» պատկերով, որը չի խախտում օրինաչափությունը:

127. Ո՞ր դեպքում են կից անկյունները համընկնելի:

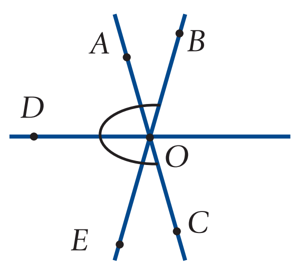
128. Որոշել ∠**ABC**-ին կից անկյան մեծությունը, եթե. ա) ∠**ABC = 111°**, բ) ∠**ABC = 90°**, գ) ∠**ABC = 15°**:

129. Կից անկյուններից մեկը. ա) սուր, բ) ուղիղ, գ) բութ անկյուն է: Ի՞նչ տեսակի անկյուն է մյուս անկյունը:

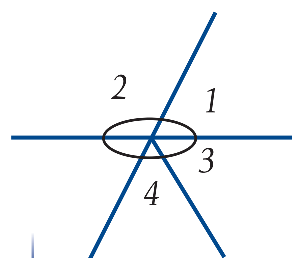
130. Նկար **67**-ում պատկերված են երեք ուղիղներ, որոնք հատվում են միևնույն կետում: Որոշել ∠**COB**-ի մեծությունը:



Նկ. 67



Նկ. 68



Նկ. 69

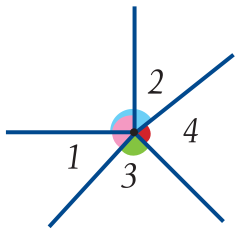
131. Նկար **68**-ում ∠**BOD** ≅ ∠**COD**: Որոշել ∠**AOD**-ի աստիճանային չափը, եթե **COB = 148°**:

132. Որոշել նկար **69**-ում պատկերված ∠**1**-ի, ∠**3**-ի, ∠**4**-ի աստիճանային չափերը, եթե ∠**2 = 117°** և ∠**3** ≅ ∠**4**:

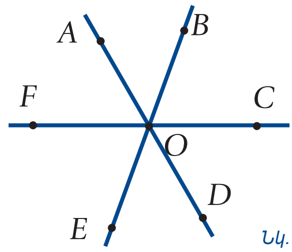
133. Հաշվել երկու ուղիղների հատմամբ առաջացած ոչ փռված անկյունների աստիճանային չափերը, եթե. ա) դրանցից երկուսի աստիճանային չափերի գումարը **114°** է, բ) դրանցից երեքի աստիճանային չափերի գումարը **220°** է:

Պատասխանը քննարկել համադասարանցիների հետ:

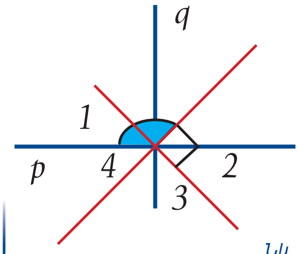
134. Նկար **70**-ում նշել **∠1**-ի, **∠2**-ի, **∠3**-ի, **∠4**-ի աստիճանային չափերը, եթե **∠2 + ∠4 = 220°**, **∠1 + ∠3 = ∠2 + ∠4**, **∠2 - ∠1 = 30°**, **∠3 + ∠4 = 170°**:



Նկ. 70



Նկ. 71



Նկ. 72

135. Նկար **71**-ում պատկերված են երեք ուղիղներ, որոնք հատվում են **O** կետում: Որոշել **∠AOF**-ի, **∠EOF**-ի, **∠AOB**-ի աստիճանային չափերի գումարը:

136. Նկար **70**-ում **∠AOB = 50°**, **∠FOE = 70°**: Որոշել **∠AOC**-ի, **∠BOD**-ի, **∠COE**-ի, **∠COD**-ի աստիճանային չափերը:

137. Նկար **72**-ում **p** և **q** ուղիղներն ուղղահայաց են, և **∠1 = 120°**: Որոշել **∠2**-ի, **∠3**-ի, **∠4**-ի աստիճանային չափերը:

Սուր անկյան կողմին ուղղահայաց ուղիղը հատում է այդ անկյան երկրորդ կողմը:	Բութ անկյան կողմին ուղղահայաց ուղիղը հատում է այդ անկյան երկրորդ կողմը:

138. Համեմատել հետևյալ երկու առաջադրությունները.
Ի՞նչ կարելի է պնդել դրանց ճշմարտացիության մասին: Լրացնել այդ պնդումներն այնպես, որ դրանք դառնան ճշմարիտ:

139. **OC** ճառագայթը **∠AOB**-ն տրոհում է երկու անկյունների: Որոշել **∠COB**-ի աստիճանային չափը, եթե **∠AOB = 78°**, իսկ **∠AOC-ն 18°**-ով փոքր է **∠BOC**-ից:

140. **∠AOB**-ն **∠AOC**-ի մի մասն է: Հայտնի է, որ **∠AOC = 108°**, **∠AOB = 3∠BOC**: Որոշել **∠AOB**-ի աստիճանային չափը:

141. Ճշմարի՞տ է արդյոք, որ տրված կետով անցնում է միակ ուղիղը, որն ուղղահայաց է տրված ուղղին: Հիմնավորել այդ պնդումը: Պատասխանը քննարկել համադասարանցիների հետ:

142. **A** կետով, որը չի պատկանում **d** ուղղին, անցնում է այդ ուղիղը հատող երեք ուղիղ: Ճշմարի՞տ է արդյոք, որ այդ հատողներից առնվազն երկուսը ուղղահայաց չեն **d** ուղղին:

I ԳԼԽԻ ԿՐԿՆՈՒԹՅԱՆ ՀԱՐՑԵՐ

143. Քանի՞ ուղիղ է անցնում երկու կետով:

144. Քանի՞ ընդհանուր կետ կարող են ունենալ երկու ուղիղները:

145. Բացատրել, թե ինչ է. ա) հատվածը, բ) ճառագայթը:

146. Ո՞ր պատկերն է կոչվում անկյուն: Բացատրել, թե ինչ են անկյան գագաթը և կողմերը: Ո՞ր անկյունն է կոչվում փռված:

147. Ո՞ր երկրաչափական պատկերն է կոչվում ուռուցիկ:

148. Նկարագրել անկյան հիմնական հատկությունները:

149. Ո՞ր երկրաչափական պատկերներն են կոչվում. ա) համընկնելի, բ) հավասար:

150. Բացատրել, թե ինչպես համեմատել երկու հատվածները: Ո՞ր կետն է կոչվում հատվածի միջնակետ: Քանի՞ միջնակետ կարող է ունենալ հատվածը:

151. Բացատրել, թե ինչպես համեմատել երկու անկյուններ: Ո՞ր ճառագայթն է կոչվում անկյան կիսորդ: Քանի՞ կիսորդ կարող է ունենալ անկյունը:

152. Ի՞նչ է անկյան աստիճանային չափը:

153. Ի՞նչ գործիքներ են օգտագործում. ա) կետերի հեռավորություն, բ) անկյան մեծություն չափելիս:

154. Ո՞ր անկյունն է կոչվում. ա) սուր, բ) ուղիղ, գ) բութ:

155. Ո՞ր անկյուններն են կոչվում կից: Ինչի՞ է հավասար կից անկյունների մեծությունների գումարը: Ո՞ր անկյուններն են կոչվում ուղղաձիգ: Ինչ հատկությամբ են օժտված ուղղաձիգ անկյունները:

156. Ո՞ր ուղիղներն են կոչվում ուղղահայաց: Բացատրել, թե ինչու միևնույն ուղղին ուղղահայաց երկու ուղիղները չեն հատվում:

157. Որո՞նք են. **ա)** հատվածի, **բ)** անկյան հիմնական բնութագրիչները:

158. Ինչո՞վ է հատվածը տարբերվում ճառագայթից, ինչո՞վ են այդ երկրաչափական պատկերները նման:

159. Ինչո՞վ է ուղղված հատվածը տարբերվում ճառագայթից, ինչո՞վ են այդ երկրաչափական պատկերները նման:

160. Ո՞ր դեպքում ուղղված հատվածները. **ա)** համընկնելի են, **բ)** հավասար են:

161. Հնարավո՞ր է արդյոք համեմատել երկրաչափական պատկերներ, որոնք ունեն տարբեր չափսեր: Պատասխանը հիմնավորել օրինակներով և քննարկել համադասարանցիների հետ:

162. Համընկնելի՞ են արդյոք ուղղաձիգ անկյունները: Պատասխանը հիմնավորել և քննարկել համադասարանցիների հետ:

163. Էակա՞ն է արդյոք անկյան անսահմանափակությունը այդ երկրաչափական պատկերի հատկությունները ուսումնասիրելիս:

ԼՐԱՑՈՒՑԻՉ ԽՆԴԻՐՆԵՐ

164. **O** կետը **1,2** մ երկարությամբ **AB** հատվածի միջնակետն է: **AB** ուղղի **M** և **N** կետերը դասավորված են **O** կետի հակադիր կողմերում, ընդ որում՝ **OM = 1,6** դմ և **ON = 40** սմ: **AM** և **NB** հատվածների երկարություններն արտահայտել սանտիմետրերով:

165. Տրված է չորս ուղիղ, որոնցից յուրաքանչյուր երկուսը հատվում են: Որոշել հատման կետերի ընդհանուր թիվը, եթե այդ կետերից յուրաքանչյուրով անցնում է երկու ուղիղ:

166. Միևնույն կետում հատվող երեք ուղիղներ հատված են այդ կետով չանցնող ուղղով: Քանի՞ ոչ փռված անկյուն է ստացվել:

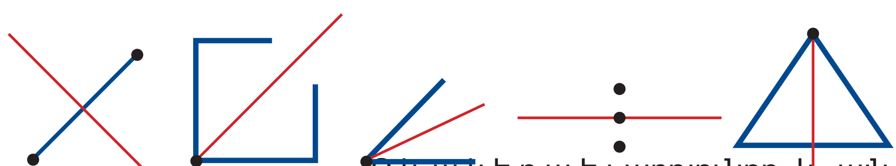
167. **N** կետը պատկանում է **MP** հատվածին: **M** և **P** կետերի հեռավորությունը **24** սմ է, իսկ **N** և **M** կետերի հեռավորությունը երկու անգամ մեծ է **N** և **P** կետերի հեռավորությունից: Հաշվել. ա) **N** և **P**, բ) **N** և **M** կետերի հեռավորությունը:

168. **a** երկարությամբ հատվածը կետերով տրոհված է. ա) երեք բ) հինգ զույգ առ զույգ համընկնելի հատվածների: Որոշել եզրային հատվածների միջնակետերի հեռավորությունը:

169. **36** սմ երկարությամբ հատվածը տրոհված է չորս զույգ առ զույգ ոչ համընկնելի մասերի: Եզրային մասերի միջնակետերի հեռավորությունը **30** սմ է: Որոշել միջին մասերի միջնակետերի հեռավորությունը:

170. **A, B** և **C** կետերը պատկանում են միևնույն ուղղին, **M** և **N** կետերը համապատասխանաբար **AB** և **AC** հատվածների միջնակետերն են: Ապացուցել, որ **BC = 2MN**:

171. Պարզել տրված երկրաչափական պատկերների հաջորդականության օրինաչափությունը:



Ձևակերպել արդյունքը և այն համեմատել համադասարանցիների արդյունքների հետ: Ինչպե՞ս են կոչվում այդպիսի պատկերները:

172. Երկու համընկնելի բութ անկյուններ ունեն ընդհանուր կողմ, իսկ դրանց երկրորդ կողմերն ուղղահայաց են: Որոշել այդ բութ անկյան աստիճանային չափը:

173. Հայտնի է, որ **∠AOB = 35°**, **∠BOC = 50°**: Հաշվել **AOC** անկյան աստիճանային չափը: Հնարավոր դեպքերից յուրաքանչյուրի համար քանոնի և անկյունաչափի միջոցով ներկայացնել գծագիր:

174. Երկու կից անկյուններից մեկը մեծ է մյուսից երեք անգամ: Որոշել այդ անկյունների մեծությունները:

175. **Ohk** անկյան մեծությունը **120°** է, իսկ **Ohm** անկյանը՝ **150°**: Որոշել **Okm** անկյան աստիճանային չափը: Հնարավոր դեպքերից յուրաքանչյուրի համար ներկայացնել գծագիր:

176. Որոշել կից անկյունների մեծությունները, եթե. ա) դրանցից մեկը **45°**-ով մեծ է մյուսից, բ) դրանց մեծությունների տարբերությունը հավասար է **35°**-ի:

177. Որոշել երկու կից անկյունների կիսորդներով առաջացած անկյան աստիճանային չափը:

178. Ապացուցել, որ ուղղածիգ անկյունների կիսորդները դասավորված են միևնույն ուղղի վրա:

179. Ապացուցել, որ եթե **ABC** և **CBD** անկյունների կիսորդներն ուղղահայաց են, ապա **A, B** և **D** կետերը պատկանում է միևնույն ուղղի:

180. Համեմատել հետևյալ երկու պնդումները.

Բութ անկյան կիսորդը տրոհում է այն երկու սուր անկյունների:	Ցանկացած անկյան կիսորդը տրոհում է այն երկու սուր անկյունների:

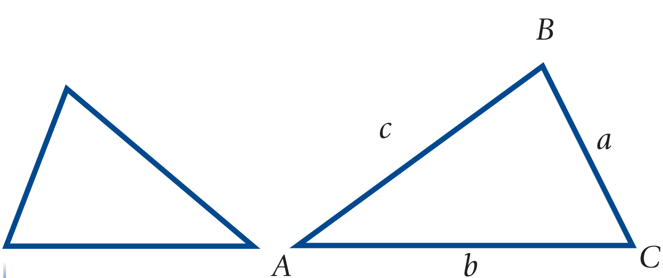
Ի՞նչ է հնարավոր պնդել դրանց ճշմարտացիության մասին: Դրանցից ո՞րն է ավելի ընդհանուր:

181. Տրված են երկու հատվող **a** և **b** ուղիղներ և **A** կետ, որը չի պատկանում այդ ուղիղներին: **A** կետով տարված են **m** և **n** ուղիղներ այնպես, որ m ⊥ **a**, **n** ⊥ **b**: Ապացուցել, որ **m** և **n** ուղիղները չեն համընկնում:

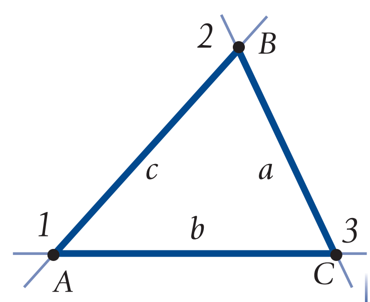
182. Փռված անկյան գագաթով տարված են երկու ճառագայթներ, որոնք այդ անկյունը տրոհում են երեք զույգ առ զույգ համընկնելի մասերի: Ապացուցել, որ միջին անկյան կիսորդն ուղղահայաց է փռված անկյան կողմերին:

Ինչպես գիտենք (աքսիոմ **2°**), գոյություն ունի երեք կետ, որոնք չեն պատկանում միևնույն ուղղին: Ընտրենք որևէ երեք այդպիսի կետ և դրանք զույգ առ զույգ միացնենք հատվածներով (նկ. **73,** ա): Ստացված երկրաչափական պատկերը կոչվում է **եռանկյուն**: Այդ երեք կետերը կոչվում են **եռանկյան գագաթներ**, իսկ այդ երեք հատվածները՝ **եռանկյան կողմեր**: Նկար **73**-ում պատկերված է **A, B, C** գագաթներով և **AB, BC, CA** կողմերով եռանկյուն: Այդպիսի եռանկյունը նշանակվում է **ΔABC** (կարդացվում է «եռանկյուն **ABC**», կամ «**ABC** եռանկյուն»): Այդ նույն երկրաչափական պատկերը կարելի է նշանակել այլ կերպ՝ փոխելով գագաթների կարգը՝ **ΔBCA, ΔCAB, ΔACB, ΔCBA, ΔBAC**: **ABC** եռանկյան գագաթներով և համապատասխան կողմերը պարունակող ճառագայթներով որոշվող **BAC**, **CBA** և **ACB** անկյունները կոչվում են **եռանկյան ներքին անկյուններ** կամ պարզապես **եռանկյան անկյուններ**: Հաճախ դրանք նշանակում են մեկ տառով՝ **∠A, ∠B, ∠C**: Ընդունված է ասել, որ **A գագաթից BC կողմը (BC հատվածը) երևում է A անկյան տակ**: Նմանապես **B** գագաթից **AC** կողմը երևում է **B** անկյան տակ և **C** գագաթից **AB** կողմը երևում է **C** անկյան տակ: **∠A**-ն, **∠B**-ն, **∠C**-ն անվանում են **ABC եռանկյան համապատասխանաբար BC, CA, AB կողմին հանդիպակաց անկյուն**, իսկ **BC, CA, AB** կողմերը՝ համապատասխանաբար **A, B, C անկյուններին հանդիպակաց կողմեր**:

Ասում են նաև, որ **∠A-ն, ∠B-ն առընթեր են ABC եռանկյան**



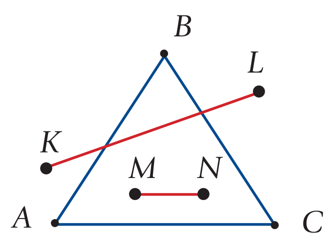
Նկ. 73



Նկ. 74

AB կողմին, **∠B-ն, ∠C-ն՝ BC կողմին, իսկ ∠A-ն, ∠C-ն՝ AC կողմին**: Եռանկյան ներքին անկյունների կից անկյունները կոչվում են **եռանկյան արտաքին անկյուններ**: Նկար **74**-ում **ABC** եռանկյան արտաքին անկյունները նշանակված են **∠1, ∠2, ∠3**: Եռանկյան կողմերի երկարությունների համար օգտագործում են հետևյալ նշանակումները **a = BC, b = AC, c = AB**:

ABC եռանկյան **AB, BC, AC** կողմերը կազմում են այդ եռանկյան ուրվագիծը: Եռանկյան կողմերի երկարությունների գումարը կոչվում է **եռանկյան պարագիծ**: Այն սովորաբար նշանակում են **2p**: $p = \frac{1}{2}(a + b + c)$ թիվն անվանում են **ABC եռանկյան կիսապարագիծ**: **ABC** եռանկյան ուրվագիծը տրոհում է հարթության բոլոր այն կետերի բազմությունը, որոնք չեն պատկանում այդ ուրվագծին, երկու ենթաբազմության: Դրանք կոչվում են **ABC եռանկյան ներքին և արտաքին տիրույթներ** (նկ. **75**): Եռանկյան ներքին տիրույթը բնութագրվում է ուռուցիկությամբ՝ իր ցանկացած **M** և **N** կետերի համար **MN** հատվածը ամբողջությամբ պատկանում է այդ տիրույթին (նկ. **75**): Դրան հակառակ եռանկյան արտաքին տիրույթում գոյություն ունեն կետեր, որոնցով որոշվող հատվածը ամբողջությամբ չի պատկանում այդ տիրույթին (նկ. **75**, **K** և **L** կետեր): Այլ կերպ ասած՝ եռանկյան արտաքին տիրույթը ուռուցիկ չէ: Սովորաբար, եռանկյուն ասելով՝ հասկանում են դրա ուրվագծի և ներքին տիրույթի միավորումը:



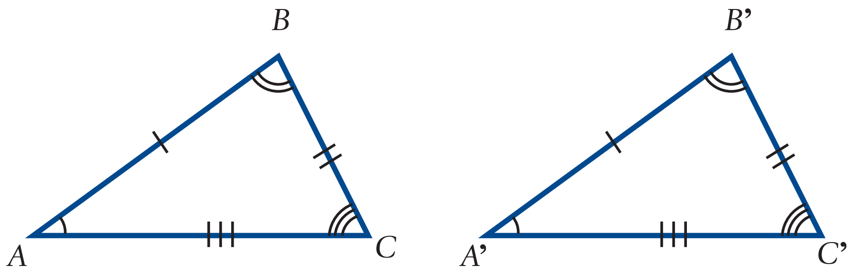
Նկ. 75

Եռանկյան ձևը և չափսերը հնարավոր է նկարագրել դրա կողմերի և ներքին անկյունների միջոցով, ուրեմն եռանկյան կողմերը և անկյունները այդ երկրաչափական պատկերի հիմնական երկրաչափական բնութագրիչներն են: Այդ պատճառով դրանք անվանում են նաև **եռանկյան հիմնական տարրեր**:

Երկու եռանկյուններ կոչվում են **համընկնելի**, եթե այդ եռանկյունների համապատասխան կողմերը և համապատասխան անկյունները համընկնելի են: Երկու եռանկյուններ կոչվում են **հավասար**, եթե այդ եռանկյունները համընկնում են: Հիշեցնենք ևս մեկ անգամ, որ տարբեր երկրաչափական պատկերները հավասար լինել չեն կարող: Եռանկյունների համընկնելիությունը նշանակվում է $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$: Եռանկյունների հավասարությունը նշանակվում է $\Delta ABC \equiv \Delta A'B'C'$: Դա նշանակում է, որ $A \equiv A'$, $B \equiv B'$, $C \equiv C'$, հետևաբար այդ եռանկյունները համընկնում են:

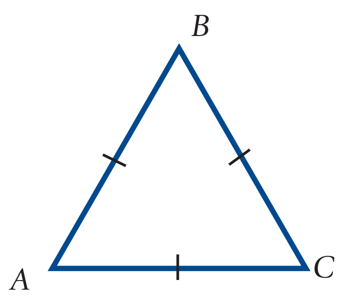
Նկար **76**-ում պատկերված են համընկնելի եռանկյուններ՝ ΔABC և $\Delta A'B'C'$: Դա նշանակում է, որ $AB \cong A'B'$, $BC \cong B'C'$, $AC \cong A'C'$, $\angle CAB \cong \angle C'A'B'$, $\angle ABC \cong \angle A'B'C'$, $\angle BCA \cong \angle B'C'A'$: Այստեղից անմիջապես հետևումէ,որ ***համընկնելի եռանկյունների համապատասխանաբար համընկնելի կողմերի հանդիպակաց անկյունները համընկնելի են և հակառակը, համապատասխանաբար համընկնելի անկյունների հանդիպակաց կողմերը համընկնելի են***:

Օրինակ՝ նկար **76**-ում պատկերված **ABC** և **A’B’C’** համընկնելի եռ-



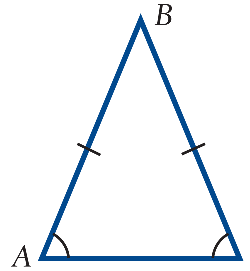
Նկ. 76

անկյուններում համապատասխանաբար համընկնելի **AB** և **A’B’** կողմերի հանդիպակաց **C** և **C’** անկյունները համընկնելի են, համընկնելի **B** և **B’** անկյունների հանդիպակաց **AC** և **A’C’** կողմերը համընկնելի են: Ինչպես գիտենք, հատվածների դեպքում $AB \equiv BA$: Եռանկյունը ավելի բարդ երկրաչափական պատկեր է: Կամայական **ABC** եռանկյան դեպքում ճանականորեն տեղի չունի նույնիսկ $\Delta ABC \equiv \Delta BCA$ հավասարությունը: Սակայն մենք կարող ենք առանձնացնել եռանկյունների մի հատուկ տեսակ, որում կողմերը զույգ առ զույգ համընկնելի են: Այդպիսի եռանկյունները կոչվում են **կանոնավոր եռանկյուններ** (նկ. **77**): Բնականաբար կանոնավոր եռանկյան անկյունները նույնպես զույգ առ զույգ համընկնելի են:



Նկ. 77

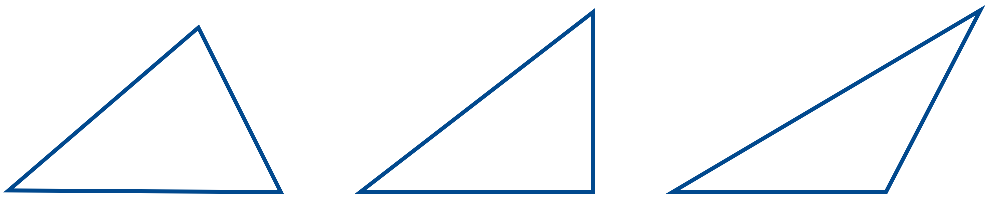
Այժմ դիտարկենք այն դեպքը, երբ եռանկյան երկու կողմերն են համընկնելի (ասենք՝ **AB**-ն և **BC**- ն), ուրեմն դրանց հանդիպակաց ∠**C**-ն և ∠**A**-ն համընկնելի են: Այդպիսի եռանկյունները կոչվում են **կիսականոնավոր եռանկյուններ**, համընկնելի կողմերը կոչվում են **սրունքներ**, իսկ երրորդ կողմը կոչվում է **հիմք** (նկ. **78**):



Նկ. 78

Եռանկյան ձևը ավելի հարմար է նկարագրել դրա անկյունների մեծությունների միջոցով:

Տարբերում են **սուրանկյուն եռանկյուններ** (նկ. **79**, ա) **ուղղանկյուն**



ա) **բ)** **գ)**

Նկ. 79

եռանկյուններ (նկ. **79**, բ) և **բութանկյուն եռանկյուններ** (նկ. **79**, գ):

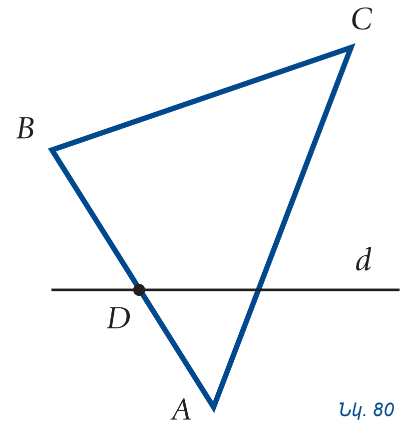
Եռանկյունը, որը չունի ուղիղ կամ բութ անկյուն, կոչվում է սուրանկյուն եռանկյուն: Եթե եռանկյան անկյուններից մեկը մեծ է **90°**-ից, ապա եռանկյունը կոչվում է բութանկյուն եռանկյուն: Եթե եռանկյան անկյուններից մեկի մեծությունը **90°** է, ապա այդպիսի եռանկյունը կոչվում է ուղղանկյուն եռանկյուն: Այդ եռանկյան ուղիղ անկյան հանդիպակաց կողմը անվանում են ուղղանկյուն **եռանկյան ներքնաձիգ**, իսկ մնացած երկու կողմերը՝ **ուղղանկյուն եռանկյան էջեր**:

Հետևյալ պնդումը ճշմարիտ է կամայական եռանկյան համար:

Թեորեմ 1: Եթե ուղիղը չի անցնում եռանկյան գագաթներից որևէ մեկով և հատում է դրա կողմերից մեկը ներքին կետում, ապա այն հատում է այդ եռանկյան ևս մեկ կողմը ներքին կետում:

Ապացուցում: Դիցուք **d** ուղիղը չի անցնում **ABC** եռանկյան **A**, **B**,

C գագաթներից որևէ մեկով և հատում է դրա կողմերից մեկը, ասենք՝ **AB**-ն **D** ներքին կետում (նկ. **80**)։ Ուրեմն **A** և **B** կետերը դասավորված են **d** ուղղով որոշվող տարբեր կիսահարթություններում։ Դիտարկենք եռանկյան **C** գագաթը։ Քանի որ **d** ուղիղը չի անցնում **ABC** եռանկյան **C** գագաթով, ուստի այդ գագաթը դասավորված է նշված կիսահարթություններից մեկում։



Նկ. 80

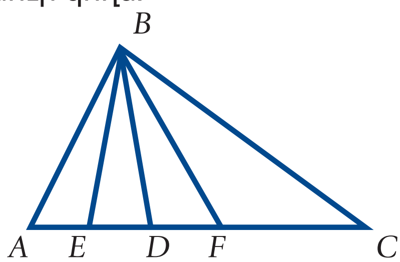
Եթե **C** և **A** գագաթները դասավորված են տարբեր կիսահարթություններում, ապա **d** ուղիղը հատում է եռանկյան **AC** կողմը։ Եթե **A** և **C** կետերը դասավորված են նույն կիսահարթության մեջ, ապա տարբեր կիսահարթություններում են **C** և **B** կետերը։ Այդ դեպքում **d** ուղիղը հատում է եռանկյան **BC** կողմը։ Թեորեմն ապացուցված է։

Հետագայում մենք օգտվելու ենք հետևյալ աքսիոմից։

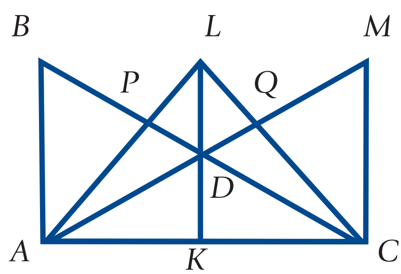
26. Եթե ABC և A’B’C’ եռանկյուններում AB ≅ A’B’, BC ≅ B’C’, ∠ABC ≅ ∠A’B’C’, ապա ∠CAB ≅ ∠C’A’B’, ∠BCA ≅ ∠B’C’A’։

Գործնական առաջադրանքներ

183. Ընդհանուր դիրքի չորս կետերով կառուցել բոլոր հնարավոր եռանկյունները։ Քանի՞ եռանկյուն ստացվեց։ Նշել բոլոր այն եռանկյունները, որոնք ունեն մեկական ընդհանուր կողմ։



Նկ. 81



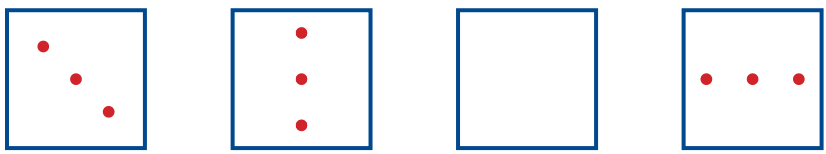
Նկ. 82

Նկար **81**-ում նշել բոլոր եռանկյունները և դրանց տեսակները՝ սուրանկյուն, ուղղանկյուն, բութանկյուն:

184. Նկար **82**-ում պատկերված են եռանկյուններ: Օգտվելով քանոնից և անկյունաչափից՝ նշել այդ եռանկյուններում համընկնելի կողմերը և անկյունները:

185. Օգտվելով քանոնից և կարգինից՝ կառուցել կիսականոնավոր եռանկյուն, որում սրունքների երկարությունը հավասար են **15** սմ, իսկ հիմքի երկարությունը՝ **10** սմ:

186. Բացահայտել օրինաչափություն տրված երկրաչափական պատկերների հաջորդականության մեջ: Արտագծել պատկերները տետրում, լրացնել դատարկ վանդակը:



187. Գծագրել **D** ուղիղ անկյունով **ABD** ուղղանկյուն եռանկյուն, այնուհետև **BD** ընդհանուր էջով համընկնելի **CBD** եռանկյուն: Ինչպե՞ս է դասավորված **D** կետը **ABC** եռանկյան **AC** կողմի ծայրակետերի նկատմամբ: Ճշմարի՞տ է արդյոք, որ $\angle A \cong \angle C$:

188. Գծագրել բութանկյուն եռանկյուն և բութ անկյան գագաթը միացնել հանդիպակաց կողմի ներքին կետին այնպես, որ ստացվի. **ա**) ուղղանկյուն, **բ**) սուրանկյուն, **գ**) բութանկյուն եռանկյուն: Քանի՞ եռանկյուն ստացվեց: Ո՞ր տեսակի են այդ եռանկյունները: Համեմատել այդ կառուցումները համադասարանցիների կառուցումների հետ:

189. Տրված առաջադրությունը «Եթե ուղիղը չի անցնում եռանկյան գագաթով և ընդգրկում է այդ եռանկյան ներքին կետ, ապա…» լրացնել այնպես, որ ստացվի թեորեմ: Ապացուցել ստացված պնդումը:

190. Օգտագործելով առաջադրանք **187**-ը՝ կառուցել. **ա**) կանոնավոր, **բ**) կիսականոնավոր եռանկյուն:

191. Քանոնի և անկյունաչափի միջոցով կառուցել ուղղանկյուն եռանկյուն, որի. **ա**) սուր անկյան մեծությունը **60°** է, **բ**) էջերը համընկնելի են:

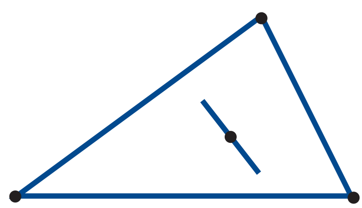
192. Գծել **ABC** և **KLM** եռանկյուններ, որոնցում **AB** ≅ **KL** և **AC** ≅ **KM**: Ո՞ր լրացուցիչ պայմանի դեպքում այդ եռանկյունները կլինեն համընկնելի: Պատասխանը քննարկել համադասարանցիների հետ:

Հարցեր և խնդիրներ

193. Ճշմարի՞տ է արդյոք, որ եռանկյունը երեք օղակներով փակ բեկյալի և դրանով սահմանափակված հարթության մասի միավորումն է:

194. Ճշմարի՞տ է արդյոք, որ եռանկյունը եռանկյունաձև ուրվագծի և այդ ուրվագծով սահմանափակված հարթության մասի միավորումն է:

195. Ճշմարի՞տ է արդյոք, որ եթե ուղիղը անցնում է եռանկյան ներքին տիրույթի կետով, ապա այն հատում է այդ եռանկյան կողմերից առնվազն մեկը ներքին կետում (նկ. **83**):



Նկ. 83

196. Կողմերից ո՞րն է ամենամեծը. ա) ուղղանկյուն, բ) բութանկյուն եռանկյան մեջ: Ո՞ր անկյունն է ամենամեծը. ա) ուղղանկյուն, բ) բութանկյուն եռանկյան մեջ:

197. Ի՞նչ տեսակի եռանկյուն է կանոնավոր եռանկյունը:

198. **ABC** եռանկյան **AB** կողմի երկարությունը **17** սմ է: **AC** կողմը երկու անգամ մեծ է **AB** կողմից, իսկ **BC** կողմը **10** սմ-ով փոքր է **AC** կողմից: Որոշել **ABC** եռանկյան պարագիծը:

199. Եռանկյան պարագիծը հավասար է **48** սմ, իսկ կողմերից մեկի երկարությունը՝ **18** սմ: Որոշել այդ եռանկյան մնացած երկու կողմերի երկարությունները, եթե դրանց տարբերությունը **4** սմ է:

200. **PQR** եռանկյան մեջ **PQ = QR**, **PR = 8** սմ, **S** կետը պատկանում է **QR** կողմին, ընդ որում՝ **QS = SR**: **S** կետը **PQR** եռանկյան պարագիծը բաժանում է երկու մասերի, որոնցից մեկը մեծ է մյուսից **2** սմ-ով: Որոշել **PQ** հատվածի երկարությունը: Պատասխանը քննարկել համադասարանցիների հետ:

201. **ABC** կիսականոնավոր եռանկյան ներքին տիրույթում ընտրված է այնպիսի **O** կետ, որ **AOB = AOC = 120°**: Ապացուցել, որ **AO**-ն **BAC** անկյան կիսորդն է և որոշել **BOC** անկյան աստիճանային չափը:

202. Գոյություն ունի՞ արդյոք եռանկյուն, որն ընդգրկում է ընդամենը մեկ՝ ա) բութ, բ) ուղիղ, գ) սուր անկյուն:

203. Համեմատել հետևյալ երկու առաջադրությունները:

Եթե եռանկյան որևէ երկու կողմ համընկնելի են, ապա համընկնելի են նաև այդ եռանկյան երկու անկյունները:	Եթե եռանկյան որևէ երկու անկյուն համընկնելի են, ապա համընկնելի են նաև այդ եռանկյան երկու կողմերը:

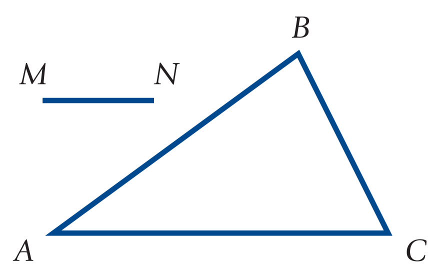
Պատասխանը քննարկել համադասարանցիների հետ:

204. Ապացուցել, որ ցանկացած եռանկյան պարագիծը մեծ է այդ եռանկյան ցանկացած կողմի երկարության կրկնապատիկից:

205. Յուրաքանչյուր հատվածի համար հնարավոր է նշել կետ, որը հավասարահեռ է դրա ծայրակետերից: Ձևակերպել համանման պնդում կամայական եռանկյան համար՝ ուղեկցելով համապատասխան նկարով:

206. Ուռուցի՞կ պատկեր է արդյոք երկու եռանկյունների. ա) միավորումը, բ) հատումը: Պատասխանը հիմնավորել օրինակներով:

207. Ո՞ր դեպքում է եռանկյուն-հատված երկրաչափական պատկերը (նկ. **84**) ուռուցիկ:



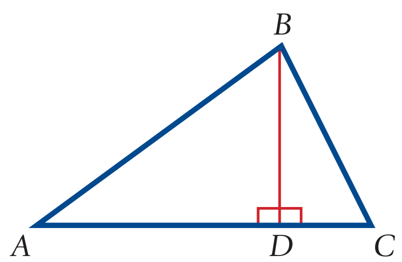
Նկ. 84

208. Ճշմարի՞տ է արդյոք, որ եռանկյան կողմի երկարությունը համեմատական չէ հանդիպակաց անկյան աստիճանային չափին: Պատասխանը հիմնավորել օրինակներով և քննարկել համադասարանցիների հետ:

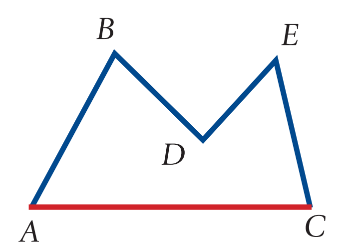
209. Կատարել հետևյալ համալիրի առաջադրանքները:

Ճշմարի՞տ է արդյոք, որ եռանկյան ամենամեծ կողմի հանդիպակաց անկյունն ամենամեծն է այդ եռանկյան մեջ:	Ճշմարի՞տ է արդյոք, որ եռանկյան ամենամեծ անկյան հանդիպակաց կողմը ամենամեծն է այդ եռանկյան մեջ:
Ապացուցել, որ ուղղանկյուն եռանկյան ներքնաձիգը մեծ է այդ եռանկյան յուրաքանչյուր էջից:	Ապացուցել, որ եռանկյան ցանկացած կողմի երկարությունը փոքր է մնացած երկու կողմերի երկարությունների գումարից:

Վերջին պնդումն ապացուցելու համար օգտվել նկար **85**-ից:



Նկ. 85



Նկ. 86

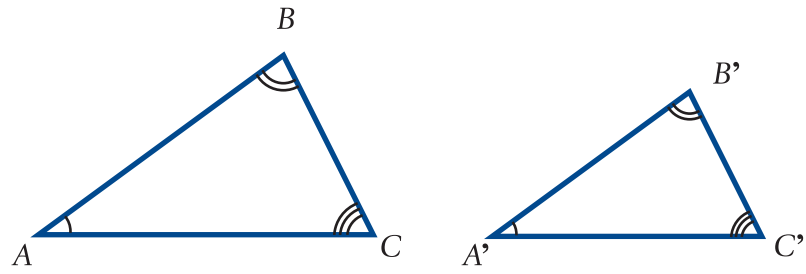
Արդյունքները քննարկել համադասարանցիների հետ: Օգտվելով նկար **86**-ից՝ ապացուցել, որ ցանկացած **A** և **B** կետերի հեռավորությունը փոքր է այդ ծայրակետերով ցանկացած բեկյալի երկարությունից:

210. Կառուցել. **ա**) բութանկյուն, **բ**) ուղղանկյուն, **գ**) սուրանկյուն եռանկյուն՝ օգտագործելով **Paint** ծրագիրը:

211. Օգտվելով **Paint** ծրագրից՝ կառուցել. **ա**) կիսականոնավոր, **բ**) կանոնավոր եռանկյուն: Համեմատել արդյունքը համադասարանցիների արդյունքների հետ:

§2. ԵՌԱՆԿՅՈՒՆՆԵՐԻ ՀԱՄԸՆԿՆԵԼԻՈՒԹՅԱՆ ԱՌԱՋԻՆ ՀԱՅՏԱՆԻՇԸ

Համընկնելի եռանկյուններում համապատասխան կողմերը համընկնելի են և համապատասխան անկյունները համընկնելի են: Դա նշանակում է, որ **ΔABC ≅ ΔA' B' C'** պայմանից հետևում է, որ **AB ≅ A'B', BC ≅ B'C', AC ≅ A'C', ∠A ≅ ∠A', ∠B ≅ ∠B', ∠C ≅ ∠C'**: Ճշմարիտ է նաև հակառակը, եթե **ABC** և **A' B' C'** եռանկյուններում տեղի ունեն **AB ≅ A'B', BC ≅ B'C', AC ≅ A'C', A ≅ A', B ≅ B', C ≅ C'** պայմանները, ապա այդ եռանկյունները համընկնելի են՝ **ΔABC ≅ ΔA'B'C'**: Կարող ենք ասել, որ այս վեց պայմանները բավարար են **ABC** և **A'B'C'** եռանկյունների համընկնելիության համար: Անհրաժե՞շտ են, արդյոք, դրանք **ABC** և **A'B'C'** եռանկյունների համընկնելիության համար: Հնարավո՞ր չէ արդյոք հիմնավորել այդ եռանկյունների համընկնելիությունը հիմնական տարրերի մի մասի համընկնելիության հիման վրա: Որ դա ոչ միշտ է հնարավոր, ցույց է տալիս հետևյալ օրինակը: Դիցուք **ABC** և **A'B'C'** եռանկյուններում համապատասխան անկյունները համընկնելի են (նկ. **87**)՝ **∠A ≅ ∠A', ∠B ≅ ∠B', ∠C ≅ ∠C'**: Սակայն պարզ է, որ այդ եռանկյունները համընկնելի չեն, քանի որ այդ եռանկյունների համապատասխան կողմերը համընկնելի չեն:

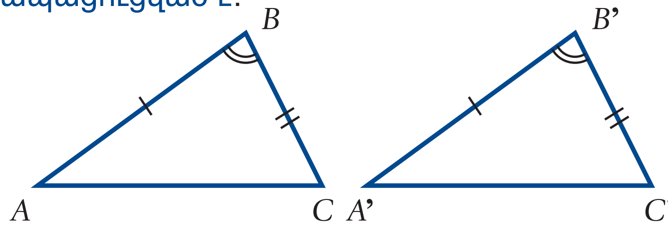


Նկ. 87

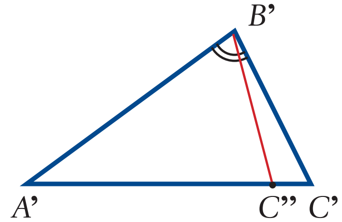
Գործնականում երկու եռանկյունների համընկնելիությունը բացահայտում են՝ համեմատելով հիմնական տարրերի միայն մի մասը: Համապատասխան թեորեմները կոչվում են **եռանկյունների համընկնելիության հայտանիշներ**:

Թեորեմ 1: Եթե մի եռանկյան երկու կողմերը և դրանցով կազմված անկյունը համապատասխանաբար համընկնելի են մյուս եռանկյան երկու կողմերին և դրանցով կազմված անկյանը, ապա այդ եռանկյունները համընկնելի են:

Ապացուցում: Դիցուք **ABC** և **A'B'C'** եռանկյուններում **AB** ≅ **A'B', BC** ≅ **B'C', ∠B** ≅ **∠B'** (նկ. **88**): Ըստ աքսիոմ **26°**-ի՝ **∠C** ≅ **∠C', ∠A** ≅ **∠A'** և այդ եռանկյունների համընկնելիությունը հաստատելու համար բավական է համոզվել, որ **AC** ≅ **A'C'**: Ենթադրենք, որ այդ կողմերը համընկնելի չեն: Դա նշանակում է, որ կամ **A'C'** հատվածը մեծ է **AC** հատվածից, կամ **A'C'** հատվածը փոքր է **AC** հատվածից: **A'C' > AC** դեպքում **A'C'** ճառագայթի վրա **A'** գագաթից տեղադրենք **A'C''** ≅ **AC** հատված (նկ. **89**): Պարզ է, որ **B'** ընդհանուր գագաթով **B'C'** և **B'C''** ճառագայթները տարբեր են: **ABC** և **A'B'C''** եռանկյուններում **AB** ≅ **A'B'**, **AC** ≅ **A'C''**, **∠A** ≅ **∠A'**, ուրեմն ըստ աքսիոմ **26°**-ի՝ մասնավորապես **∠C** ≅ **∠C''**, որտեղից նաև **∠C'** ≅ **∠C''**: Այսպիսով, **B'A'** ճառագայթի **B'** գագաթից (**B'A', C'**) կիսահարթության մեջ կառուցված են տարբեր **B'C'** և **B'C''** ճառագայթներ, որոնք **B'A'** ճառագայթի հետ կազմում են միևնույն **B'** անկյունը: Դա հակասում է աքսիոմ **20°**-ին: Նույնպիսի հակասության է հանգեցնում նաև **A'C' < AC** ենթադրությունը: Ուրեմն ենթադրությունը կեղծ էր և իրականում **A'C'** ≅ **AC**: Գալիս ենք այն եզրակացության, որ **ABC** և **A'B'C'** եռանկյուններում համապատասխան կողմերը և համապատասխան անկյունները զույգ առ զույգ համընկնելի են: Հետևաբար **ΔABC** ≅ **ΔA'B'C'**: Թեորեմն ապացուցված է:

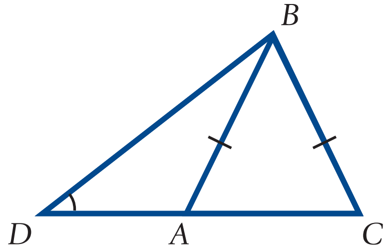


Նկ. 88



Նկ. 89

Այս թեորեմի բովանդակությունը կազմում է **եռանկյունների համընկնելիության առաջին հայտանիշը**: Ասում են, որ **ABC** և



Նկ. 90

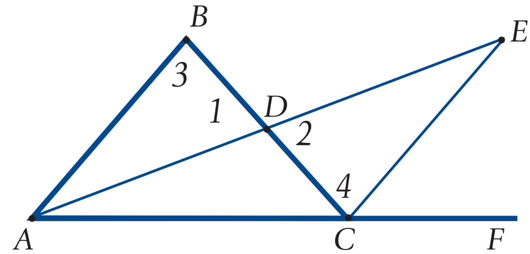
A’B’C’ եռանկյունները համընկնելի են՝ ըստ եռանկյունների համընկնելիության առաջին հայտանիշի, կամ էլ ըստ երկու կողմերի և դրանցով կազմված անկյան: Նշենք, որ այս թեորեմում եռանկյունների երկու կողմերով կազմված անկյունների համընկնելիության պայմանն էական է: Դա նշանակում է, որ եթե երկու եռանկյուններում երկուական կողմեր համընկնելի են և մեկական անկյուն համընկնելի են, ապա այդ եռանկյունները կարող են չլինել համընկնելի: Իրոք, կառուցենք **ABC** կիսականոնավոր եռանկյուն (**AB** ≅ **BC**) և **CA** ճառագայթի վրա ընտրենք այնպիսի **D** կետ, որ **D – A – C** (նկ. **90**): **DBA** և **DBC** եռանկյուններում **DB** կողմն ընդհանուր է, **AB** ≅ **BC** և **D** անկյունը ընդհանուր է: Չնայած դրան, այդ եռանկյունները համընկնելի չեն: Պատճառն այն է, որ **D** անկյան կողմերը այդ եռանկյունների համապատասխան համընկնելի կողմեր չեն: Եռանկյունների համընկնելիության առաջին հայտանիշը ցույց է տալիս, որ երկու եռանկյունների համընկնելիությունը հնարավոր է ստուգել, օգտագործելով այդ եռանկյունների ընդամենը երեքական տարր՝ երկու կողմ և մեկ անկյուն: Իհարկե, գործնական ստուգման դեպքում դա ավելի հարմար է, քան եռանկյունների սահմանման կիրառումը:

Կիրառենք եռանկյունների համընկնելիության առաջին հայտանիշը՝ եռանկյան արտաքին անկյան հատկությունը բացահայտելու համար: Ինչպես հայտնի է, եռանկյան արտաքին անկյունները լրացնում են այդ եռանկյան կից ներքին անկյունները մինչև փռված անկյուն: *Օրինակ*՝ նկար **74**-ում **∠1**-ը **ABC** եռանկյան արտաքին անկյուններից է և **∠1 + ∠A = 180**°:

Թեորեմ 2: Եռանկյան ցանկացած արտաքին անկյուն մեծ է իրեն ոչ կից ցանկացած ներքին անկյունից:

Ապացուցում: Դիցուք **∠BCF**-ը **ABC** եռանկյան արտաքին անկյունն է՝ **∠BCA + ∠BCF = 180°** (նկ. **90**), **F**-ը՝ **AC** ճառագայթի այնպիսի կետ, որ **A – C– F**: Ապացուցենք, որ այդ անկյունը մեծ է, օրինակ, **ABC** անկյունից:

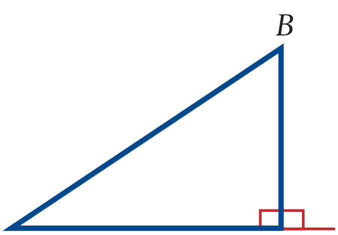
Դրա համար նշենք **BC** կողմի **D** միջնակետը և **AD** ճառագայթի վրա կառուցենք այնպիսի **E** կետ, որ **AD≅DE**: Այդ կետը դասավորված է **BCF** անկյան ներքին տիրույթում, ուստի **BCF** անկյունը մեծ է **ECB** անկյունից: Վերջինս համընկնելի է **B** անկյանը, քանի որ **ΔDCE = ΔDBA** ըստ երկու կողմերի (**DA≅DE, BD≅DC**) և դրանցով կազմված անկյան (**∠EDC≅ ∠ADB**): Այսպիսով, **∠BCF > ∠ABC**: Թեորեմն ապացուցված է:



Նկ. 91

> **Հետևանք 1:** Եթե եռանկյունն ընդգրկում է ուղիղ անկյուն, ապա այդ եռանկյան մնացած երկու անկյունները սուր անկյուններ են:

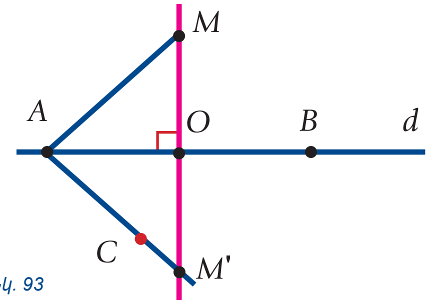
Ապացուցում: Իրոք, այդպիսի եռանկյան **C** ուղիղ անկյանը կից արտաքին անկյունը նույնպես ուղիղ անկյուն է (նկ. **92**): Ըստ ապացուցված թեորեմի՝ այն մեծ է և՛ **∠A**-ից, և՛ **∠B**-ից: Հետևաբար և՛ **∠A**-ն, և՛ **∠B**-ն սուր անկյուններ են, որն էլ պահանջվում էր ապացուցել: Այստեղից մասնավորապես հետևում է, որ եռանկյունը չի կարող ընդգրկել երկու ուղիղ անկյուն կամ, որ նույնն է, տրված կետով կարող է անցնել միայն մեկ ուղղահայաց տրված ուղղին: Այդ պնդումներն ապացուցեք ինքնուրույն:



Նկ. 92

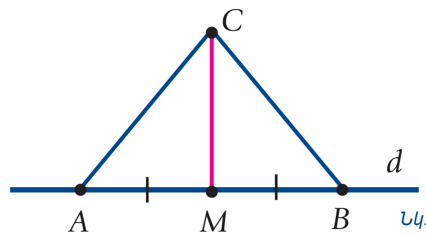
> **Հետևանք 2:** Բութանկյուն եռանկյունը ընդգրկում է երկու սուր անկյուն:

Անդրադառնանք տրված **M** կետից տրված **d** ուղղին ուղղահայացի կառուցմանը: Եթե **M** կետը չի պատկանում **d** ուղղին, ապա նախ ընտրում ենք այդ ուղղի երկու կետ՝ **A** և **B**: Այնուհետև **d** ուղղի այն կող-



Նկ. 93

մում, որը չի պարունակում **M** կետը, կառուցում ենք **A** գագաթով **BAM** անկյանը համընկնելի **BAC** անկյուն (Նկ. **93**): Կառուցում ենք **AC** ճառագայթի M' կետը այնպես, որ **AM'** ≅ **AM**: Այժմ պարզ է, որ **MM'** ⊥ **d**: Իրոք, դիցուք **O = MM'** ∩ **d**: **OAM** և **OAM'** եռանկյունները համընկնելի են ըստ եռանկյունների համընկնելիության առաջին հայտանիշի: Այստեղից հետևում է, որ համընկնելի են **AOM** և **AOM'** անկյունները: Քանի որ այդ անկյունները կից անկյուններ են, ուստի դրանցից յուրաքանչյուրը ընդգրկում է **90**°: Օգտվելով նկար **94**-ից՝ փորձեք ինքնուրույն ուսումնասիրել այն դեպքը, երբ **M** կետը պատկանում է **d** ուղղին:



Նկ. 94

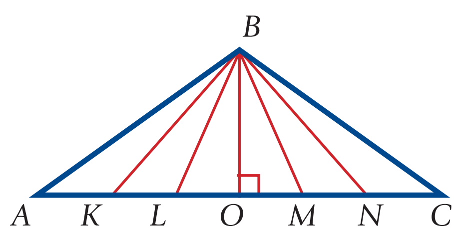
Գործնական առաջադրանքներ

212. Գծել կամայական եռանկյուն: Չափել դրա երկու կողմերն ու դրանցով կազմված անկյունը և քանոնի ու անկյունաչափի միջոցով կառուցել այդ եռանկյանը համընկնելի եռանկյուն:

213. Օգտագործելով քանոն և անկյունաչափ՝ կառուցել **ABC** եռանկյուն, որում **AB = 6** սմ, **AC = 3** սմ, ∠**A = 60°**:

214. Նկար **95**-ում նշել համընկնելի եռանկյունները, նշել դրանց համապատասխանաբար համընկնելի կողմերը և անկյունները:

215. Գծել կամայական եռանկյուն, դրա գագաթները նշանակել **A, B, C** տառերով: **ABC** եռանկյան յուրաքանչյուր կող-



Նկ. 95

մի վրա դեպի եռանկյան արտաքին տիրույթ կառուցել դրան համընկնելի եռանկյուն: Քանի՞ եղանակով է հնարավոր կառուցել այդ եռանկյունները: Քննարկել բոլոր հնարավոր դեպքերը:

216. Գծել կամայական **ABC** եռանկյուն և դրան համընկնելի **KLM** եռանկյուն: Նշել **BC** և **LM** համապատասխան կողմերի **D** և **N** միջնակետերը և համեմատել **ABD, ACD և KLN, KMN** եռանկյունները:

217. Նկար **95**-ում պատկերված կետերից որո՞նք են հավասարապես հեռացված իրարից:

Հարցեր և խնդիրներ

218. Ճշմարի՞տ է արդյոք, որ եթե **ABC** և դրան ոչ համընկնելի **KLM** եռանկյուններում **AB** ≅ **KL** և **AC** ≅ **KM**, ապա ∠**A**-ն համընկնելի չէ ∠**K**-ին:

219. **AC** և **BD** հատվածները հատվում են իրենց ընդհանուր միջնակետում: Ապացուցել, որ **ABC** և **CDA** եռանկյունները համընկնելի են:

220. **ABC** և **A'B'C'** եռանկյուններում **AB** ≅ **A'B', AC** ≅ **A'C',** ∠**A** ≅ ∠**A'**: **AB** և **A'B'** կողմերի վրա նշված են **P** և **P'** կետեր այնպես, որ **AP** ≅ **A'P'**: Ապացուցել, որ **ΔBCP = ΔB'C'P'**:

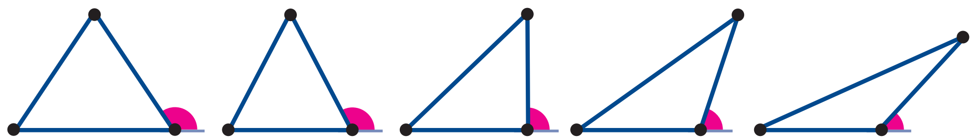
221. **CAD** անկյան կողմերի վրա նշված են **B** և **E** կետեր այնպես, որ B կետը պատկանում է **AC** հատվածին, իսկ **E** կետը՝ **AD** հատվածին, ընդ որում՝ **AC** ≅ **AD** և **AB** ≅ **AE**: Ապացուցել, որ **ΔCBD** ≅ **ΔDEC**:

222. Ո՞ր եռանկյունները կարող են լինել համընկնելի՝ ըստ. ա) երկու կողմի բ) մեկ կողմի և այդ կողմին առընթեր անկյան: Պատասխանները հիմնավորել և քննարկել համադասանցիների հետ:

223. **M** և **M'** կետերը պատկանում են **ABC** և **A'B'C'** եռանկյունների համապատասխանաբար **AC** և **A'C'** կողմերին, ընդ որում՝ **AM = 3MC, A'M' = 3M'C', AB = A'B', BM = B'M',** ∠**ABM =** ∠**A'B'M'**: Ապացուցել, որ **BC = B'C'**:

224. Լրացնել թեորեմ **2**-ի ապացուցումը, ստուգել, որ $\angle$**BCF >** $\angle$**BAC**:

225. Բացահայտել տրված հաջորդականության եռանկյունների արտաքին անկյունների օրինաչափությունը:
Ճշմարի՞տ է արդյոք «Որքան փոքր է եռանկյան արտաքին անկյան մեծությունը, այնքան փոքր է այդ եռանկյան իրեն ոչ



կից ներքին անկյան մեծությունը» պնդումը: Պատասխանը հիմնավորել օրինակներով:

226. Տրված է, որ **CO** ≅ **OD** և **AO** ≅ **OB**, **M** կետը **AB** հատվածի միջնակետն է: Ճշմարի՞տ է արդյոք, որ **MC** ≅ **MD**: Պատասխանը հիմնավորել և քննարկել համադասարանցիների հետ:

227. **ABC** և **A’B’C’** եռանկյուններում համապատասխան. ա) $\angle$**A**-ն և $\angle$**A’**-ը, $\angle$**B**-ն և $\angle$**B’**-ը, $\angle$**C**-ն և $\angle$**C’**-ը համընկնելի չեն, բ) $\angle$**A**-ն և $\angle$**A’**-ը, $\angle$**B**-ն և $\angle$**B’**-ը համընկնելի չեն: Կարո՞ղ են արդյոք համընկնելի լինել այդ եռանկյունները:

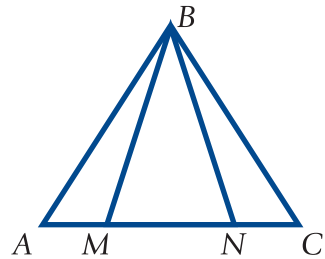
228. **ABC** եռանկյան **AB** կողմի վրա նշված է այնպիսի $\mathbf{B_1}$ կետ, որ **CB** ≅ $\mathbf{CB_1}$: Ապացուցել, որ **ABC** և $\mathbf{AB_1C}$ եռանկյունները համընկնելի չեն:

229. **A** և **B** կետերը պատկանում են **O** գագաթով անկյան կողմերին, ընդ որում՝ **OA** ≅ **OB**: Ապացուցել, որ այդ անկյան կիսորդի ցանկացած **M** կետի համար **AM** ≅ **BM**:

230. Կիրառել եռանկյունների համընկնելիության առաջին հայտանիշը և ձևակերպել ուղղանկյուն եռանկյունների համընկնելիության հայտանիշը: Համեմատել ստացված արդյունքը համադասարանցիների հայտանիշների հետ: Ընտրել հայտանիշներից լավագույնը և հիմնավորել ընտրությունը:

231. **M, N** կետերը պատկանում են **ABC** կիսականոնավոր եռանկյան **AC** հիմքին, ընդ որում՝ **AM** ≅ **NC** (նկ. **96**): Քանի՞

սուրանկյուն, ուղղանկյուն, բութանկյուն եռանկյուն է հնարավոր նշել նկարում՝ կախված **B** անկյան մեծությունից:



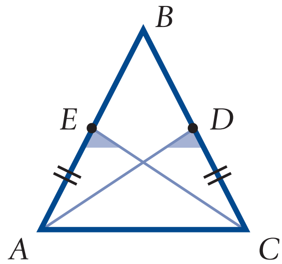
Նկ. 96

232. **ABC** կանոնավոր եռանկյան **AB, BC, CA** կողմերի վրա հաջորդաբար տեղադրված են **AK** ≅ **BL** ≅ **CM** հատվածներ: Ապացուցել, որ Δ**KLM**-ը նույնպես կանոնավոր եռանկյուն է:

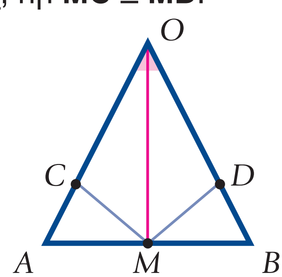
233. Կիրառել եռանկյունների համընկնելիության առաջին հայտանիշը և ձևակերպել կանոնավոր եռանկյունների համընկնելիության հայտանիշը: Համեմատել ստացված արդյունքը համադասարանցիների հայտանիշների հետ: Ընտրել հայտանիշներից լավագույնը և հիմնավորել ընտրությունը:

234. Նկար **97**-ում **ADC** ≅ **CEA, AD** ≅ **CE, AE** ≅ **CD**: Ապացուցել, որ **ΔABD** ≅ **ΔCBE**: Որոշել **BAD** անկյան մեծությունը, եթե **∠BCE = 25°**:

235. Նկար **98**-ում **CO** ≅ **OD** և **AO** ≅ **OB**, **M** կետը պատկանում է **O** անկյան կիսորդին: Ապացուցել, որ **MC** ≅ **MD**:



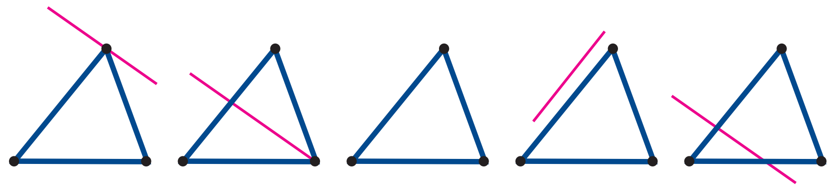
Նկ. 97



Նկ. 98

236. Կիրառել եռանկյունների համընկնելիության առաջին հայտանիշը և ձևակերպել կիսականոնավոր եռանկյունների համընկնելիության հայտանիշը: Համեմատել ստացված արդյունքը համադասարանցիների հայտանիշների հետ: Ընտրել հայտանիշներից լավագույնը և հիմնավորել ընտրությունը:

237. Բացահայտել տրված երկրաչափական պատկերների հաջորդականության օրինաչափությունը: Ձևակերպել համապատասխան պնդումները: Արտանկարել այդ պատկերները տետրում և ավելացնել բացակայող տարրը:

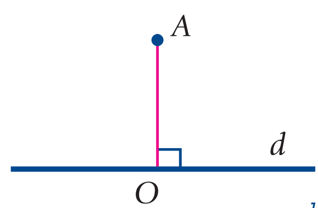


238. Ապացուցել, որ բութանկյուն եռանկյունն ընդգրկում է երկու սուր անկյուն:

239. Ապացուցել, որ բութանկյուն եռանկյան սուր անկյունների մեծությունների գումարը փոքր է բութ անկյան մեծությունից:

§3. ԵՌԱՆԿՅԱՆ ՄԻՋՆԱԳԾԵՐԸ, ԿԻՍՈՐԴՆԵՐԸ ԵՎ ԲԱՐՁՐՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ

Դիցուք **d**-ն ուղիղ է: Եթե **O** կետը պատկանում է այդ ուղղին, ապա համաձայն աքսիոմ **20°**-ի՝ **O** կետով անցնում է միակ **OA** ուղիղը, որն ուղղահայաց է **d**-ին՝ **OA⊥d** (նկ. **99**): Այդ դեպքում **AO** հատվածը կոչվում է **A կետից d ուղղին տարված ուղղահայաց**: **O** կետը կոչվում է **ուղղահայացի հիմք**: **AO** ուղղահայացի երկարությունը կոչվում է **A կետի հեռավորություն d ուղղից**: Բնականաբար հարց է առաջանում. հնարավո՞ր է արդյոք տրված **A** կետից կառուցել ուղղահայաց **d** ուղղին (և եթե այո, ապա քանի՞սը): Այդ հարցի դրական պատասխանը, ըստ էության, արդեն տրվել է ուղղահայաց ուղիղների հատկություններն ուսումնասիրելիս: Այսպիսով, տեղի ունի հետևյալ պնդումը:



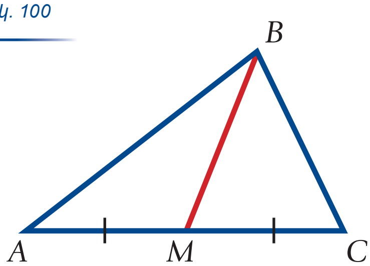
Նկ. 99

Թեորեմ 1: Ուղղին չպատկանող կետով անցնում է այդ ուղղին ուղղահայաց ուղիղ և այն էլ միայն մեկը:

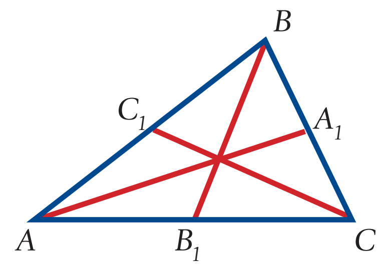
Նկ. 100

Գծագրի վրա կետից ուղղին ուղղահայաց գծելու համար օգտագործում են **գծագրական անկյունարդ** (նկ. **100**):

Եռանկյան գագաթը հանդիպակաց կողմի միջնակետին միացնող հատվածը կոչվում է **եռանկյան միջնագիծ**: Նկար **101**-ում պատկերված է **ABC** եռանկյան **BM** միջնագիծը: Քանի որ եռանկյունն ունի երեք գագաթ, ուստի ցանկացած եռանկյուն ունի երեք միջնագիծ: Նկար **102**-ում

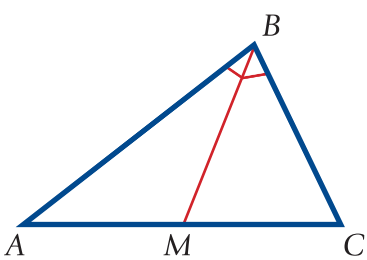


Նկ. 101

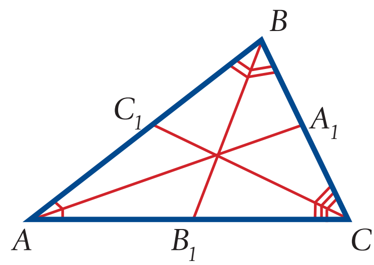


Նկ. 102

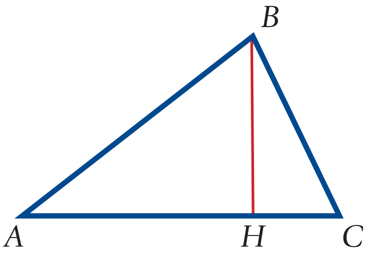
ABC եռանկյան միջնագծերն են AA_1, BB_1, CC_1 հատվածները: Հաճախ այդ նշանակումների փոխարեն օգտագործում են m_1, m_2, m_3 կամ համապատասխանաբար m_A, m_B, m_C նշանակումները (լատիներեն mediana (միջնագիծ) բառի առաջին տառով): Ի դեպ, նկար **102**-ում **ABC** եռանկյան միջնագծերն անցնում են միևնույն կետով: Դա իրոք այդպես է, սակայն միջնագծերի այդ հատկությունը մենք կհիմնավորենք



Նկ. 103



Նկ. 104

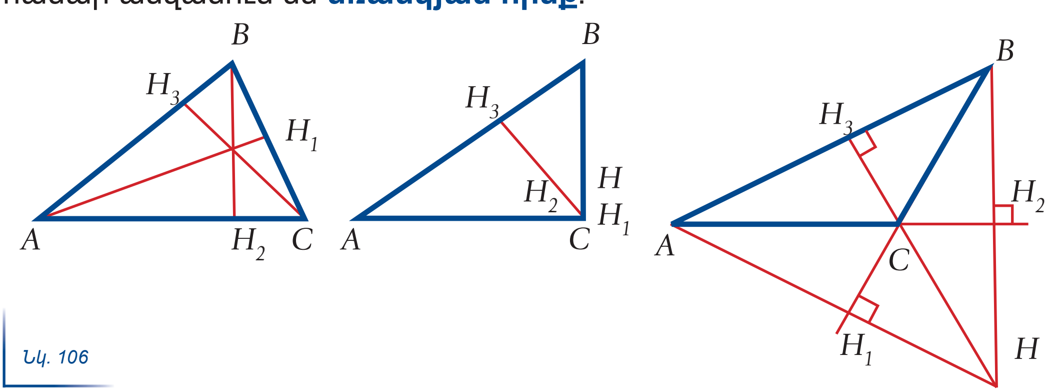


Նկ. 105

ավելի ուշ: Նշենք միայն, որ այդ կետն անվանում են **եռանկյան ծանրության կենտրոն**: Հասկանալի է, որ կամայական եռանկյան բոլոր միջնագծերը դասավորված են այդ եռանկյան ներքին տիրույթում:

Եռանկյան անկյան կիսորդի այն հատվածը, որը եռանկյան գագաթը միացնում է հանդիպակաց կողմի կետին, կոչվում է **եռանկյան կիսորդ** (նկ. **103**): Ցանկացած եռանկյուն ունի երեք կիսորդ: Նկար **104**-ում $\mathbf{AA_1}$, $\mathbf{BB_1}$, $\mathbf{CC_1}$ հատվածները **ABC** եռանկյան կիսորդներն են: Երբեմն օգտագործում են նաև հետևյալ նշանակումները՝ $\mathbf{b_1}$, $\mathbf{b_2}$, $\mathbf{b_3}$ կամ $\mathbf{b_a}$, $\mathbf{b_b}$, $\mathbf{b_c}$ (անգլերեն **bysector** (կիսորդ) բառի առաջին տառով): Եռանկյան կիսորդները հատվում են միևնույն կետում, որն անվանում են **եռանկյան ներկենտրոն**: Բացի այդ, եռանկյան կիսորդները դասավորված են այդ եռանկյան ներքին տիրույթում: Այդ հատկությունները մենք կհիմնավորենք ավելի ուշ:

Եռանկյան գագաթից հանդիպակաց կողմն ընդգրկող ուղղին տարված ուղղահայացի հատվածը կոչվում է **եռանկյան բարձրություն** (նկ. **105**): Ցանկացած եռանկյուն ունի երեք բարձրություն: Նկար **105**-ում (ա, բ, գ) $\mathbf{AH_1}$, $\mathbf{BH_2}$, $\mathbf{CH_3}$ հատվածները **ABC** եռանկյան բարձրություններն են: Սովորաբար եռանկյան բարձրությունը նշանակում են նաև լատինական **h** տառով (անգլերեն **height** (բարձրություն) բառի առաջին տառով): *Օրինակ*՝ $\mathbf{h_1 = AH_1}$, $\mathbf{h_2 = BH_2}$, $\mathbf{h_3 = CH_3}$ կամ $\mathbf{h_a}$, $\mathbf{h_b}$, $\mathbf{h_c}$: Երբեմն եռանկյան այն կողմը, որին տարված է բարձրություն, առանձնացնելու համար անվանում են **եռանկյան հիմք**:



Նկ. 106

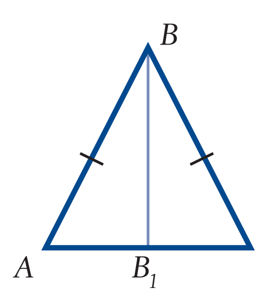
Եռանկյան բարձրությունը կարող է հայտնվել եռանկյան ներքին տիրույթից դուրս (նկ. **106**, գ): Մյուս կողմից, սուրանկյուն և ուղղանկյուն եռանկյունների դեպքում այդ եռանկյունների բաձրությունները հատվում են միևնույն կետում, բութանկյուն եռանկյան դեպքում՝ ոչ: Այդ բարդությունը հաղթահարում են՝ ասելով, որ եռանկյան բարձրությունները պարունակող ուղիղները հատվում են միևնույն կետում (**H** կետում): Այդ կետն անվանում են **եռանկյան օրթոկենտրոն**:

Եռանկյան ծանրության կենտրոնը, ներկենտրոնը, օրթոկենտրոնը պատկանում են եռանկյան բնութագրիչների թվին: Համընկնելի եռանկյուններում այդ երեք կետերը դասավորված են միատեսակ այդ եռանկյունների գագաթների և կողմերի նկատմամբ: Եռանկյան երկրաչափության մեջ այդ կետերի դերը առանձնացնելու համար դրանք անվանում են **եռանկյան նշանավոր կետեր**: Հետագայում մենք կծանոթանանք եռանկյան այլ նշանավոր կետերի:

Դիտարկենք կիսականոնավոր եռանկյան պարզագույն հատկությունները: Ինչպես հայտնի է, կանոնավոր եռանկյան բոլոր կողմերը զույգ առ զույգ համընկնելի են, բոլոր անկյունները նույնպես զույգ առ զույգ համընկնելի են: Ուրեմն դա եռանկյունների ամենապարզ տեսակն է: Կիսականոնավոր եռանկյան մեջ համընկնելի են միայն երկու կողմերը: Հինհունաստանցի Թալեսը համարվում է այդ երկրում երկրաչափության հիմնադիրը: Նա է ապացուցել առաջին երկրաչափական թեորեմները, և նրան են վերագրում հետևյալ առաջադրության առաջին ապացուցումը:

Թեորեմ 2: Կիսականոնավոր եռանկյան հիմքին առընթեր անկյունները համընկնելի են:

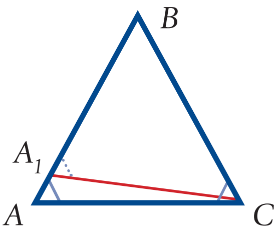
Ապացուցում: Դիցուք **ΔABC**-ն կիսականոնավոր եռանկյուն է, **AB** ≅ **BC**, իսկ $\mathbf{BB_1}$-ը՝ դրա **B** անկյան կիսորդը (նկ. **107**): $\mathbf{ABB_1}$ և $\mathbf{CBB_1}$ եռանկյունները համընկնելի են ըստ եռանկյունների համընկնելիության առաջին հայտանիշի (**AB** ≅ **BC** ըստ պայմանի, $\mathbf{BB_1}$-ն ընդհանուր կողմն է, $\angle \mathbf{ABB_1} \cong \angle \mathbf{CBB_1}$, քանի որ $\mathbf{BB_1}$-ը **B** անկյան կիսորդն է): **A** և **C** անկյուններն



Նկ. 107

այդ եռանկյունների համընկնելի կողմերի հանդիպակաց անկյուններ են, հետևաբար համընկնելի են՝ $\angle A \cong \angle C$: Թեորեմն ապացուցված է:

Թեորեմ 3: Եթե եռանկյան որևէ երկու անկյուն համընկնելի են, ապա այդ եռանկյունը կիսականոնավոր է:



Նկ. 108

Ապացուցում: Դիցուք **ABC** եռանկյան **A** և **C** անկյունները համընկնելի են, ապացուցենք, որ $AB \cong BC$: Ենթադրենք հակառակը, այսինքն՝ որ **AB** հատվածը համընկնելի չէ **BC** հատվածին (նկ. **108**): Ուրեմն այդ երկու կողմերից մեկը մեծ է մյուսից: Ենթադրենք, որ $AB > BC$: **BA** ճառագայթի վրա կառուցենք այնպիսի A_1 կետ, որ $A_1B \cong BC$: Քանի որ $AB > BC$, ուստի A_1 կետը դասավորված է **A** և **B** կետերի միջև: Բացի այդ, CA_1 ճառագայթը անցնում է **ACB** անկյան ներքին տիրույթով, այսինքն՝ $\angle A_1CB < \angle ACB$: Ըստ կառուցման՝ A_1BC եռանկյունը կիսականոնավոր եռանկյուն է, ուրեմն ըստ նախորդ թեորեմի՝ $\angle A_1CB \cong \angle CA_1B$: Բայց մյուս կողմից, CA_1B անկյունը AA_1C եռանկյան արտաքին անկյունն է: Օգտվելով եռանկյան արտաքին անկյան մասին թեորեմից և թեորեմի պայմանից՝ կստանանք

$$\angle CA_1B > \angle A, \angle A \cong \angle C, \angle C > \angle A_1CB,$$

որը հակասում է $\angle A_1CB \cong \angle C A_1 B$ պայմանին: Ուրեմն ենթադրությունը կեղծ էր և իրականում **AB** կողմը մեծ չէ **BC** կողմից: Համանման ձևով կարելի է ցույց տալ, որ **BC** կողմն էլ մեծ չէ **AB** կողմից: Ուրեմն $AB \cong BC$, և թեորեմն ապացուցված է:

Անդրադառնանք **ABC** կիսականոնավոր եռանկյանը (նկ. **107**) և նկատենք, որ ABB_1 և CBB_1 եռանկյունների համընկնելիությունից հետևում է նաև, որ $AB_1 \cong B_1C$ և $\angle AB_1B \cong \angle CB_1B$: Այդ պայմաններից առաջինը նշանակում է, որ BB_1-ը **ABC** եռանկյան միջնագիծն է, իսկ երկրորդը, հաշվի առնելով այդ անկյունների կից լինելը, որ BB_1-ը **ABC** եռանկյան բարձրությունն է: Ուրեմն տեղի ունի հետևյալ հատկությունը:

Թեորեմ 4: Կիսականոնավոր եռանկյան հիմքին տարված կիսորդը միաժամանակ այդ եռանկյան միջնագիծն է և բարձրությունը:

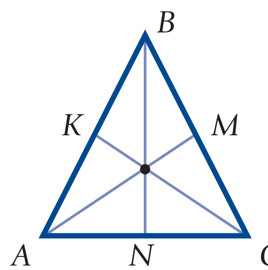
Այսպիսով, կիսականոնավոր եռանկյան հիմքին տարված կիսորդը, միջնագիծը և բարձրությունը զույգ առ զույգ համընկնում են (հավասար են): Քանի որ կանոնավոր եռանկյունը կիսականոնավոր եռանկյան այն մասնավոր դեպքն է, երբ հիմքը համընկնելի է յուրաքանչյուր սրունքի, ուստի այն օժտված է կիսականոնավոր եռանկյան բոլոր հատկություններով հետևյալ ճշտումներով:

1. Կանոնավոր եռանկյան ներքին անկյունները զույգ առ զույգ համընկնելի են:

2. Կանոնավոր եռանկյան ցանկացած անկյան կիսորդ համընկնում է այդ անկյան գագաթից տարված և՛ միջնագծին, և՛ բարձրությանը:

Թեորեմ 5: Կանոնավոր եռանկյան միջնագծերը զույգ առ զույգ համընկնելի են:

Ապացուցում: Դիցուք **AM**-ը և **BN**-ը **ABC** կանոնավոր եռանկյան միջնագծեր են (նկ. **109**): **ABN** և **ACM** եռանկյունները համընկնելի են ըստ համընկնելիության առաջին հայտանիշի: Իրոք, **AB** ≅ **AC** ըստ պայմանի, **AN** ≅ **CM**, քանի որ **M** և **N** կետերը համապատասխանաբար **AC** և **BC** կողմերի միջնակետերն են: Վերջապես, ∠**AB** ≅ ∠**AC**, քանի որ կանոնավոր եռանկյան անկյունները զույգ առ զույգ համընկնելի են, իսկ այդ եռանկյան միջնագիծը նաև անկյան կիսորդ է: Հետևաբար, **BN** ≅ **AM:** Պարզ է, որ **CK** միջնագիծը համընկնելի է և՛ **BN** միջնագծին, և՛ **AM** միջնագծին: Թեորեմն ապացուցված է:



Նկ. 109

Հետևանք 1: **Կանոնավոր եռանկյան կիսորդները զույգ առ զույգ համընկնելի են:**

Հետևանք 2: **Կանոնավոր եռանկյան բարձրությունները զույգ առ զույգ համընկնելի են:**

Հետևանք 3: **Կանոնավոր եռանկյան ծանրության կենտրոնը համընկնում է այդ եռանկյան ներկենտրոնին և օրթոկենտրոնին:**

Այս պնդումները ապացուցեք ինքնուրույն:

Գործնական առաջադրանքներ

240. Գծել **d** ուղիղ և ընտրել հարթության որևէ **A** կետ, որը չի պատկանում այդ ուղղին: Գծագրական անկյունարդի միջոցով կառուցել **A** կետով անցնող ուղղահայաց **d** ուղղին:

241. Գծել **d** ուղիղ, այդ ուղղի կամայական **A** կետում կառուցել ուղղահայաց այդ ուղղին և ուղղահայացի վրա ընտրել **B** կետ, որը չի պատկանում **d**-ին: Ընտրել **d** ուղղի մեկ այլ **M** կետ և համեմատել **BA** և **BM** հատվածների երկարությունները:

242. Գծել կամայական եռանկյուն և քանոնով կառուցել այդ եռանկյան միջնագծերը:

243. Գծել կամայական եռանկյուն և անկյունաչափով ու քանոնով կառուցել այդ եռանկյան անկյունների կիսորդները:

244. Գծել սուրանկյուն, ուղղանկյուն, բութանկյուն եռանկյուններ և գծագրական անկյունարդի օգնությամբ կառուցել դրանց բոլոր բարձրությունները: Ի՞նչ առանձնահատկություն եք նկատում:

245. Ճշմարի՞տ է արդյոք, որ կանոնավոր եռանկյան կողմերի միջնակետերը ձևավորում են կանոնավոր եռանկյուն: Համեմատել այդ եռանկյունների կողմերի երկարությունները և պարագծերը:

246. Կառուցել **ABC** կիսականոնավոր եռանկյուն, որում **AB = 10** սմ, **BC = 7** սմ, **AC = 7** սմ:

247. Կառուցել սուրանկյուն, ուղղանկյուն, բութանկյուն եռանկյունների կողմերի միջնուղղահայացները: Ի՞նչ եք նկատում այդ կառուցման ընթացքում:

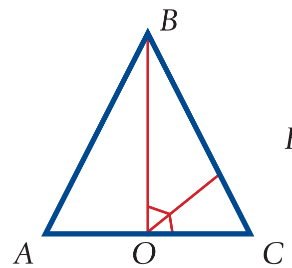
248. Գծել կամայական **ABC** եռանկյուն և կառուցել դրա BB_1 միջնագիծը: Կառուցել մեկ այլ $A_1B_1C_1$ եռանկյուն, որի A_1C_1 կողմը պատկանում է **AC** ուղղին, և **B** գագաթով անցնող միջնագիծը համընկնում է BB_1-ին:

249. Գծել կամայական **ABC** եռանկյուն և կառուցել **B** անկյան **BM** կիսորդը: Կառուցել մեկ այլ $A_1B_1C_1$ եռանկյուն, որի A_1C_1 կողմը պատկանում է **AC** ուղղին, և A_1C_1 կողմի հանդիպակաց անկյան կիսորդը համընկնում է **BM** հատվածին:

250. Գծել կամայական **ABC** եռանկյուն և **B** գագաթում կառուցել **BH** բարձրությունը: Կառուցել մեկ այլ $\mathbf{A_1B_1C_1}$ եռանկյուն, որի $\mathbf{A_1C_1}$ կողմը պատկանում է **AC** ուղղին, և այդ կողմին տարված բարձրությունը համընկնում է **BH** հատվածին: Ի՞նչ տարբերություն եք նկատում այս և նախորդ երկու խնդիրների կառուցումների մեջ:

Խնդիրներ

251. Նկար **110**-ում պատկերված է **ABC** կիսականոնավոր եռանկյուն, որում **BO** հատվածը միջնագիծն է, իսկ **OK** հատվածը՝ **BOC** անկյան կիսորդը: Որոշել **AOK** անկյան մեծությունը:



Նկ. 110

252. **ABC** եռանկյան **AD** միջնագիծը շարունակված է **BC** կողմից դուրս՝ **AD**-ին համընկնելի **DE** հատվածով, և **E** կետը միացված է **C** կետին: ա) Ապացուցել, որ $\Delta\mathbf{ABD} \cong \Delta\mathbf{ECD}$, բ) որոշել **ACE** անկյան աստիճանային չափը, եթե $\angle\mathbf{ACD = 56°}$, $\angle\mathbf{ABD = 40°}$:

253. **BC** հիմքով **ABC** կիսականոնավոր եռանկյան պարագիծը հավասար է **40** սմ, իսկ **BCD** կանոնավոր եռանկյան պարագիծը՝ **45** սմ: Որոշել **ABC** եռանկյան **AB** և **BC** կողմերի երկարությունները:

254. **BC** հիմքով **ABC** կիսականոնավոր եռանկյան մեջ կառուցված է **AM** միջնագիծը: Որոշել **AM** միջնագծի երկարությունը, եթե **ABC** եռանկյան պարագիծը **32** սմ է, իսկ **ABM** եռանկյան պարագիծը՝ **24** սմ:

255. Ապացուցել, որ կամայական եռանկյան միջնագծերի երկարությունների գումարը փոքր է այդ եռանկյան պարագծից:

256. Ապացուցել, որ եթե եռանկյան միևնույն գագաթով անցնող միջնագիծը և անկյան կիսորդը համընկնում են, ապա եռանկյունը կիսականոնավոր է:

257. Ապացուցել, որ եթե եռանկյան միևնույն գագաթով անցնող միջնագիծը համընկնում է բարձրությանը, ապա եռանկյունը կիսականոնավոր է:

258. Ապացուցել, որ եթե եռանկյան միևնույն գագաթով անցնող անկյան կիսորդը համընկնում է բարձրությանը, ապա եռանկյունը կիսականոնավոր է:

259. Ապացուցել, որ կիսականոնավոր եռանկյան հիմքին առընթեր անկյունների կիսորդները համընկնելի են:

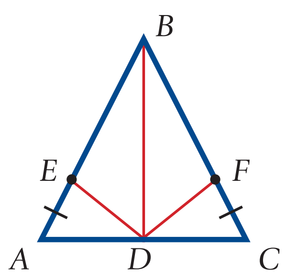
260. Ապացուցել, որ կիսականոնավոր եռանկյան բարձրություններից երկուսը համընկնելի են: Որո՞նք են այդ բարձրությունները: Պատասխանը քննարկել համադասարանցիների հետ:

261. Ապացուցել, որ կիսականոնավոր եռանկյան միջնագծերից երկուսը համընկնելի են: Որո՞նք են այդ միջնագծերը: Պատասխանը քննարկել համադասարանցիների հետ:

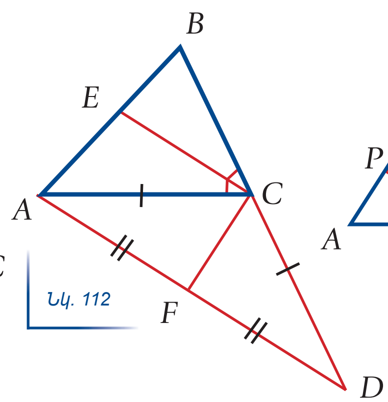
262. **ABC** եռանկյան **AM** միջնագիծը համընկնելի է **BM** հատվածին: Ապացուցել, որ **ABC** եռանկյան անկյուններից մեկի մեծությունը հավասար է մնացած երկու անկյունների մեծությունների գումարին:

263. **ABC** կիսականոնավոր եռանկյան **BC** հիմքի վրա նշված են **M** և **N** կետեր այնպես, որ $BM \cong CN$: Ապացուցել, որ. ա) $\angle BAM \cong \angle CAN$, բ) **AMN** եռանկյունը կիսականոնավոր է:

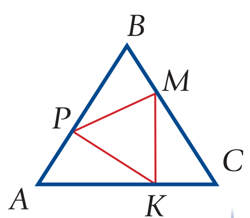
264. **AC** հատվածի վրա **AC** ուղղի տարբեր կողմերում կառուցված են երկու՝ **ABC** և **ADC** կիսականոնավոր եռանկյուններ: Ապացուցել, որ **BD** և **AC** ուղիղներն ուղղահայաց են:



Նկ. 111



Նկ. 112



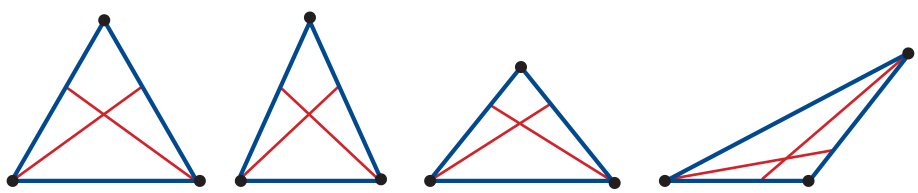
Նկ. 113

265. **BD** հատվածը **AC** հիմքով **ABC** կիսականոնավոր եռանկյան միջնագիծն է: **AB** և **CB** կողմերի վրա համապատասխանաբար նշված են **E** և **F** կետեր այնպես, որ **AE** ≅ **CF** (նկ. **111**): Ապացուցել, որ. ա) **ΔBDE** ≅ **ΔBDF**, բ) **ΔADE = ΔCDF**:

266. **ABC** եռանկյան **BC** կողմն ընդգրկող ուղղի վրա, **C** կետից այն կողմ տեղադրված է **CA** հատվածին համընկնելի **CD** հատված (նկ. **112**): **CE** հատվածը **ABC** եռանկյան **C** անկյան կիսորդն է, իսկ **CF**-ը՝ **ACD** եռանկյան միջնագիծը: Ապացուցել, որ **CF** ⊥ **CE**:

267. **ABC** կանոնավոր եռանկյան կողմերի վրա ընտրված են **P, M, K** կետեր այնպես, որ առաջացած հատվածների երկարությունները բավարարում են **AP : PB = BM : MC = CK : KA = 1: 3** պայմաններին (նկ. **113**): Ապացուցել, որ **PMK** եռանկյունը կանոնավոր է:

268. Բացահայտել տրված երկրաչափական պատկերների հաջորդականության օրինաչափությունը: Ձևակերպել եռանկյան համապատասխան երկրաչափական հատկությունները:



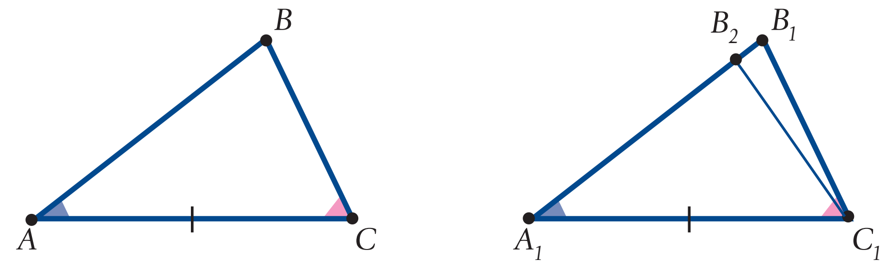
269. Օգտագործելով **Paint** ծրագիրը՝ կառուցել **ABC** եռանկյուն, այնուհետև այդ եռանկյան. ա) միջնագծերը, բ) բարձրությունները:

270. Օգտագործելով **Power Point** ծրագիրը, կառուցել **ABC** եռանկյուն, այնուհետև այդ եռանկյան **B** գագաթով անցնող բարձրությունը, միջնագիծը և կիսորդը: Ինչպե՞ս են դասավորված այդ հատվածները:

§4. ԵՌԱՆԿՅՈՒՆՆԵՐԻ ՀԱՄԸՆԿՆԵԼԻՈՒԹՅԱՆ ԵՐԿՐՈՐԴ ԵՎ ԵՐՐՈՐԴ ՀԱՅՏԱՆԻՇՆԵՐԸ

Եռանկյունների համընկնելիության առաջին հայտանիշում օգտագործվում է այդ եռանկյունների երկուական կողմ և մեկական անկյուն: Երկրորդ հայտանիշում ասպարեզ են գալիս երկուական անկյուն և մեկական կողմ:

Թեորեմ 1: Եթե մի եռանկյան կողմը և դրան առընթեր երկու անկյունները համապատասխանաբար համընկնելի են մյուս եռանկյան կողմին և դրան առընթեր երկու անկյուններին, ապա այդ եռանկյունները համընկնելի են:



Նկ. 114

Ապացուցում: Դիցուք ABC և $A_1B_1C_1$ եռանկյուններում $AC \cong A_1C_1$, $\angle A \cong \angle A_1$, $\angle C \cong \angle C_1$ (նկ. **114**): Ապացուցենք, որ $\Delta ABC \cong \Delta A_1B_1C_1$: Դրա համար բավական է ստուգել, որ $AB \cong A_1B_1$: Ենթադրենք, որ այդ կողմերը համընկնելի չեն, այսինքն՝ AB և A_1B_1 հատվածների երկարությունները հավասար չեն: Ուրեմն կա՛մ $AB < A_1B_1$, կա՛մ $AB > A_1B_1$: Դիցուք $AB < A_1B_1$: A_1B_1 ճառագայթի վրա A_1 գագաթից տեղադրենք $A_1B_2 \cong AB$ հատված: Քանի որ $AB < A_1B_1$, ուստի A_1- B_2- B_1: $A_1B_2C_1$ եռանկյունը համընկնելի է ABC եռանկյանը՝ ըստ եռանկյունների համընկնելիության առաջին հայտանիշի ($A_1C_1 \cong AC$, $A_1B_2 \cong AB$, $\angle A \cong \angle A_1$): Այստեղից մասնավորապես հետևում է, որ $\angle A_1C_1B_2 \cong \angle C$, ուրեմն $\angle A_1C_1B_2 \cong \angle C_1$: Այսպիսով, C_1 կետով անցնում են C_1B_1 և C_1B_2 ճառագայթներ, որոնք C_1A_1 ճառագայթի հետ կազմում են նույն մեծության անկյուն, ինչը հակասում է աքսիոմ **20°**-ին: Նմանապես հակասության է հանգեցնում $AB > A_1B_1$

ենթադրությունը: Ուրեմն իրականում $\mathbf{AB \cong A_1B_1}$: Այստեղից հետևում է, որ $\mathbf{\Delta ABC \cong \Delta A_1B_1C_1}$: Թեորեմն ապացուցված է:

Եռանկյունների համընկնելիության երկրորդ հայտանիշը մասնավորապես ցուցադրում է հետևյալ պարզ փաստը: Դիցուք տրված հատվածի ծայրակետերում այդ հատվածով որոշվող ուղղի միևնույն կողմում կառուցված է երկու ճառագայթ: Եթե այդ ճառագայթների և այդ ուղղի կազմած անկյունների մեծությունների գումարը փոքր է **180°**-ից, ապա այդ ճառագայթները հատվում են:

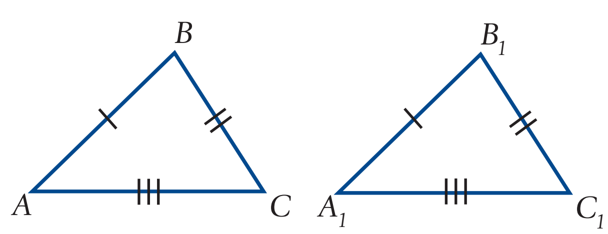
Եռանկյունների համընկնելիության երկրորդ հայտանիշը կիրառելիս հաճախ ասում են, որ եռանկյունները համընկնելի են ըստ կողմի և դրան առընթեր երկու անկյունների:

Եռանկյունների համընկնելիության առաջին և երկրորդ հայտանիշները եռանկյունների համընկնելիության ստուգումը հանգեցնում են դրանց երեք հիմնական տարրերի համընկնելիության ստուգմանը: Մի դեպքում դա եռանկյունների երկու կողմերի զույգերն են և դրանցով կազմված անկյունները, երկրորդ դեպքում՝ մեկական կողմը և դրանցից յուրաքանչյուրին առընթեր անկյունները: Եռանկյունների համընկնելիության երրորդ հայտանիշը հիմնված է համեմատվող եռանկյունների երեք համապատասխան կողմերի զույգերի համընկնելիության վրա:

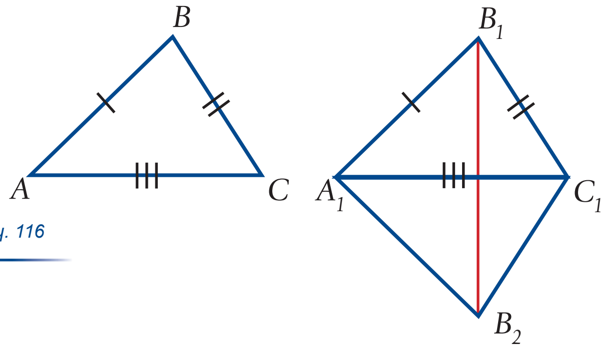
Թեորեմ 2: Եթե մի եռանկյան երեք կողմերը համապատասխանաբար համընկնելի են մյուս եռանկյան երեք կողմերին, ապա այդ եռանկյունները համընկնելի են:

Ապացուցում: Դիցուք $\mathbf{ABC}$ և $\mathbf{A_1B_1C_1}$ եռանկյուններում $\mathbf{AB \cong A_1B_1}$, $\mathbf{BC \cong B_1C_1}$, $\mathbf{CA \angle C_1A_1}$ (նկ. 115): Ապացուցենք, որ $\mathbf{\Delta ABC \cong \Delta A_1B_1C_1}$:

Դրա համար $\mathbf{A_1C_1}$ ուղղի այն կողմում, որը չի պարունակում $\mathbf{B_1}$ գագաթը, ըստ աքսիոմ **20°**-ի կառուցենք $\mathbf{ABC}$ եռանկյանը համընկնելի $\mathbf{A_1B_2C_1}$ եռանկյուն (նկ.**116**): Քանի որ ըստ կառուցման $\mathbf{A_1B_2 \cong A_1B_1}$, ուստի $\mathbf{A_1B_1B_2}$ եռանկյունը կիսականոնավոր



Նկ. 115



Նկ. 116

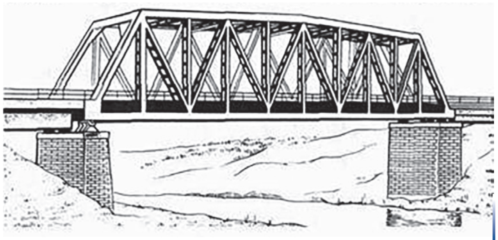
եռանկյուն է, ուրեմն $\angle A_1B_1B_2 \cong \angle A_1B_2B_1$: Համանման ձևով կարելի է ցույց տալ, որ $\Delta C_1A_1B_2 \cong \Delta C_1A_1B_1$ և ուրեմն $\angle C_1B_1B_2 \cong \angle C_1B_2B_1$: Ստացանք, որ $\angle A_1B_1B_2 + \angle C_1B_1B_2 = \angle A_1B_2B_1 + \angle C_1B_2B_1$, այսինքն՝ $\angle B_1 \cong \angle B_2$: Հետևաբար $A_1B_1C_1$ և $A_1B_2C_1$ եռանկյունները համընկնելի են ըստ երկու կողմերի ($A_1B_1 \cong A_1B_2$, $B_1C_1 \cong B_2C_1$) և դրանցով կազմված անկյան ($\angle B_1 \cong \angle B_2$): Այստեղից էլ հետևում է, որ համընկնելի են $A_1B_1C_1$ և **ABC** եռանկյունները: Թեորեմն ապացուցված է:


Նկ. 117


Նկ. 118

Եռանկյունների համընկնելիության երրորդ հայտանիշից հետևում է, որ եռանկյունը կոշտ պատկեր է: Պարզաբանենք, թե ինչ է դա նշանակում:

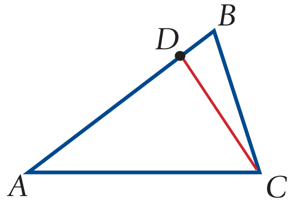
Պատկերացնենք երկու փայտաձող, որոնց երկու ծայրերն ամրացված են մեխով (նկ. **117**): Այդպիսի կառուցվածքը կոշտ չէ. իրար մոտեցնելով կամ իրարից հեռացնելով փայտաձողերի ազատ ծայրերը՝ մենք կարող ենք փոփոխել դրանց կազմած անկյունը: Այժմ վերցնենք ևս մեկ փայտաձող և դրա ծայրերն ամրացնենք առաջին երկու փայտաձողերի ազատ ծայրերին (նկ. **118**): Ստացված կառուցվածքը՝ եռանկյունը, արդեն կլինի կոշտ: Դրա մեջ հնարավոր չէ իրար մոտեցնել կամ իրարից հեռացնել որևէ երկու կողմ, այսինքն՝ հնարավոր չէ փոխել որևէ անկյուն: Իրոք, եթե դա հաջողվեր, ապա մենք կստանայինք նոր եռանկյուն, որը համընկնելի չէ սկզբնականին: Սակայն դա հնարավոր չէ, քանի որ նոր եռանկյունը պետք է լինի համընկնելի սկզբնականին՝ ըստ եռանկյունների համընկնելիության երրորդ հայտանիշի:



Նկ. 119

Այդ հատկությունը՝ եռանկյան կոշտությունը, լայնորեն օգտագործվում է ամենատարբեր բնագավառներում: Այսպես, սյունն ուղղաձիգ վիճակում ամրացնելու համար դրան միացնում են հենակներ: Նույն սկզբունքն օգտագործվում է կամուրջներ կառուցելիս (նկ. **119**): Կիրառենք եռանկյունների համընկնելիության հայտանիշները՝ եռանկյունների որոշ պարզագույն հատկություններ հիմնավորելու համար:

Թեորեմ 3: Ցանկացած եռանկյան մեջ ավելի մեծ կողմի դիմաց դասավորված է ավելի մեծ անկյուն:



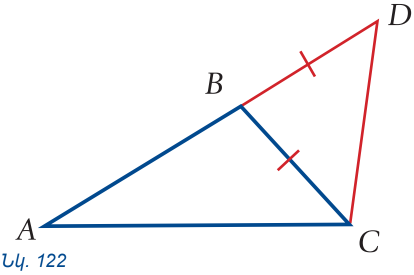
Նկ. 120

Ապացուցում: Դիցուք **ABC** եռանկյան մեջ **AB > AC** (նկ. **120**): Ցույց տանք, որ $\angle$**C** > $\angle$**B**: Դրա համար **AB** ճառագայթի վրա **A** գագաթից տեղադրենք **AD** ≅ **AC** հատված: Ուրեմն **CD** ճառագայթը դասավորված է **C** անկյան ներքին տիրույթում, այսինքն՝ **ACD** անկյունը փոքր է **C** անկյունից: Այժմ նկատենք, որ Δ**ACD**-ն կիսականոնավոր եռանկյուն է: Ուրեմն **ACD** անկյունը համընկնելի է **ADC** անկյանը, որն իր հերթին, որպես **DCB** եռանկյան արտաքին անկյուն, մեծ է **B** անկյունից: Թեորեմն ապացուցված է:

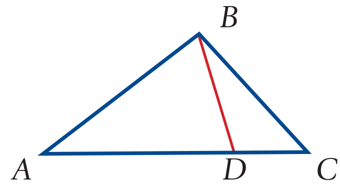
Ինքնուրույն ապացուցեք հակադարձ պնդումը. ցանկացած եռանկյան մեջ ավելի մեծ անկյան դիմաց դասավորված է ավելի մեծ կողմ:

Կիրառենք այս արդյունքները՝ հետագայի համար օգտակար առնչություններ ստանալու համար:

Թեորեմ 4: Ցանկացած եռանկյան յուրաքանչյուր կողմի երկարությունը փոքր է մնացած երկու կողմերի երկարությունների գումարից:



Նկ. 122



Նկ. 121

Ապացուցում: Վերցնենք կամայական **ABC** եռանկյուն և ստուգենք, որ, ասենք, **AC** կողմի երկարությունը փոքր է **AB** և **BC** կողմերի երկարությունների գումարից **AC < AB + BC**: Դրա համար եռանկյան **AB** կողմը շարունակենք **BD ≅ BC** չափով (նկ. **122**): Պարզ է, որ **AD = AB + BC**: Ցույց տանք, որ **AC < AD**: Կառուցելով **CD** հատվածը՝ տեսնում ենք, որ **D** անկյունը հավասար է **BCD** անկյանը և, հետևաբար, փոքր է **ACD** անկյունից: Նախորդ թեորեմի պնդումը կիրառենք **ACD** եռանկյան համար: Թեորեմն ապացուցված է:

Այսպիսով, կամայական **ABC** եռանկյան մեջ **AB < BC + CA, BC < CA + AB, CA < AB + BC**: Այս առնչությունը ունի լայն կիրառություն մաթեմատիկայի տարբեր բնագավառներում և հայտնի է որպես եռանկյան անհավասարություն:

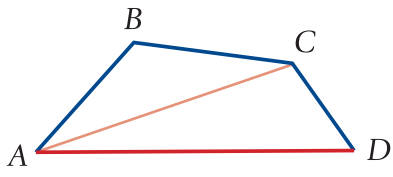
Այն կարելի է վերաձևակերպել այլ կերպ:

Թեորեմ 5: Յանկացած եռանկյան յուրաքանչյուր կողմի երկարությունը մեծ է մնացած երկու կողմերի երկարությունների տարբերությունից:

Ապացուցում: Իրոք, ցանկացած **ABC** եռանկյան համար ըստ նախորդ թեորեմի **BC < AB + CA**: Եթե այս անհավասարության երկու մասերից հանենք **AC**-ն, ապա կստանանք **| BC - AC | < AB**: Այս համարժեք թեորեմներից ստանում ենք

Հետևանք: Յարթության **A, B, C** կետերից կազմված **AB, BC, CA** հատվածներից որևէ երկուսի երկարությունների գումարը հավասար է երրորդի երկարությանն այն և միայն այն դեպքում, եթե այդ կետերը պատկանում են միևնույն ուղղին:

Թեորեմ 6: Տրված երկու կետերը միացնող հատվածը կարճ է այդ կետերը միացնող ցանկացած բեկյալից:



Նկ. 123

Ապացուցում: Եթե բեկյալը բաղկացած է երկու օղակից, ապա թեորեմի պնդումը հետևում է եռանկյան անհավասարությունից: Եթե բեկյալը բաղկացած է երեք օղակից՝ **AB, BC, CD** (նկ. **123**), ապա երկու անգամ հաջորդաբար կիրառելով եռանկյան անհավասարությունը՝ կստանանք **AD < AB + BD < AB + BC + CD:** Միանգամայն նույն եղանակով կարելի է ստուգել, որ թեորեմի պնդումը ճշմարիտ է չորս, հինգ և այլն օղակներից բաղկացած բեկյալների համար: Թեորեմն ապացուցված է:

Գործնական առաջադրանքներ

271. Գծել կամայական **ABC** եռանկյուն, մասշտաբային քանոնի և անկյունաչափի միջոցով չափել այդ եռանկյան կողմը և դրան առընթեր անկյունները: Նույն գործիքների միջոցով կառուցել **PQR** եռանկյուն, որը համընկնելի է **ABC** եռանկյանը:

272. Կառուցել **ABC** եռանկյուն, որում **AB = 10** սմ, **∠A = 50°, ∠B = 70°**:

273. Գոյություն ունե՞ն արդյոք կիսականոնավոր եռանկյուններ, որոնց հիմքին առընթեր անկյունները ուղիղ կամ բութ անկյուններ են:

274. Կառուցել կիսականոնավոր եռանկյուն, որը պարունակում է ուղիղ անկյուն: Ի՞նչ եռանկյուն ստացվեց:

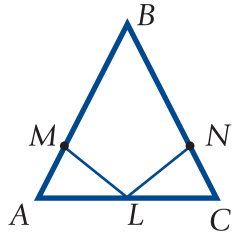
275. Գծել **AB** հատված, այնուհետև կառուցել **ACB** եռօղակ բեկյալ, որի օղակներից մեկը **AB**-ն է և որի երկարությունը. ա) երեք, բ) չորս անգամ մեծ է **AB** հատվածի երկարությունից:

276. Կիսականոնավոր եռանկյան երկու կողմերի երկարությունները են **5** սմ և **2** սմ: Ինչի՞ է հավասար երրորդ կողմի երկարությունը:

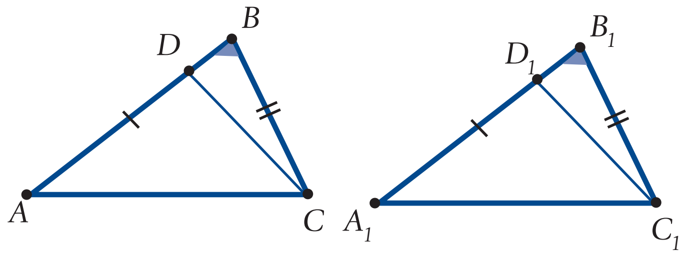
277. Հնարավո՞ր է արդյոք կառուցել եռանկյուն, որի կողմերի երկարություններն արտահայտվեն. ա) **h, mh, m + h** բ) **h, m, m + h** թվերով:

278. **O** գագաթով ոչ փռված անկյան կիսորդի կամայական **H** կետով տարված է ուղղահայաց, որն անկյան կողմերը հատում է **A** և **B** կետերում: Ապացուցել, որ **OAH** և **OBH** եռանկյունները համընկնելի են:

279. Նկար **124**-ում պատկերված է **ABC** կիսականոնավոր եռանկյուն՝ **AB** ≅ **BC**: **AB** և **BC** կողմերի վրա ընտրված են այնպիսի **M** և **N** կետեր, որ **AM = CN**: **AC** կողմի վրա ընտրված է այնպիսի **L** կետ, որ ∠**AML** ≅ ∠**CNL**: Ապացուցել, որ Δ**AML** ≅ Δ**CNL**:



Նկ. 124

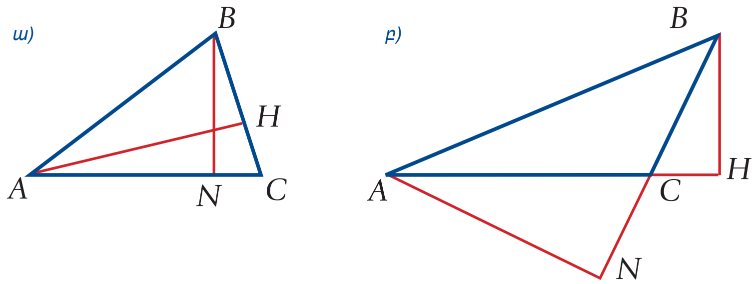


Նկ. 125

280. **ABC** և **A'B'C'** եռանկյունների տարրերը բավարարում են **AB** ≅ **A'B'**, **BC** ≅ **B'C'**, ∠**B** ≅ ∠**B'** պայմաններին: **D** և **D'** կետերը պատկանում են համապատասխանաբար **AB** և **A'B'** կողմերին, ընդ որում՝ Δ**ACD** ≅ Δ**A'C'D'** (նկ. **125**): Ապացուցել, որ Δ**BCD** ≅ Δ**B'C'D'**:

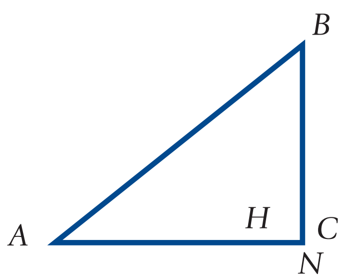
281. **ABC** եռանկյան **AH** բարձրությունը փոքր չէ **BC** կողմից, իսկ **BN** բարձրությունը՝ **AC** կողմից: Որոշել **ABC** եռանկյան անկյունների աստիճանային չափերը:

Լուծում: Եթե ենթադրենք, որ **C** անկյունն ուղիղ չէ (նկ. **126**, **ա**), ապա **AHC** և **BNC** ուղղանկյուն եռանկյուններում **AC > AH** և **BC > BN:** Ըստ պայմանի՝ **AH ≥ BC, BN ≥ AC:**



Նկ. 126

AH $\geq$ **BC, BC > BN, BN** $\geq$ **AC** անհավասարություններից հետևում է, որ **AH > AC**, իսկ **BN** $\geq$ **AC, AC > AH, AH** $\geq$ **BC** պայմաններից եզրակացնում ենք, որ **BN > BC**: Ստացանք հակասություն: Ուրեմն ենթադրությունը կեղծ էր: Նույն եղանակով ստուգվում է, որ հակասության է հանգեցնում ենթադրությունը, որ $\angle$**C > 90°** (նկ. **126**, **բ**): Ուրեմն իրականում $\angle$**C = 90°**: Այսպիսով, **ABC** եռանկյունը ուղղանկյուն եռանկյուն է: Այդ դեպքում **H, N** կետերը համընկնում են **C** գագաթին (նկ. **127**): Պայմանից ստանում ենք, որ **AH** (≅**AC**)$\geq$**BC**, **BN** (≅**BC**)$\geq$**AC**, այսինքն՝ **AC** $\geq$**BC**, **BC**$\geq$**AC**: Այստեղից հետևում է, որ **AC** ≅ **BC** և ուրեմն Δ**ABC**-ն կիսականոնավոր ուղղանկյուն եռանկյուն է՝ $\angle$**A = 45°**, $\angle$**B = 45°**, $\angle$**C = 90°**:



Նկ. 127

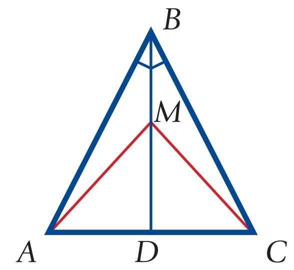
282. **ABC** եռանկյան **A** անկյան կիսորդի վրա նշված է **D** կետ, իսկ անկյան կողմերի վրա՝ այնպիսի **B** և **C** կետեր, որ $\angle$**ADB** ≅ $\angle$**ADC**: Ապացուցել, որ **BD** ≅ **CD**:

283. **ABC** և $A_1B_1C_1$ եռանկյուններում **AB** ≅ A_1B_1, **BC** ≅ B_1C_1, $\angle$**B** ≅ $\angle B_1$: **AB** և A_1B_1 կողմերի վրա նշված են **D** և D_1 կետեր այնպես, որ $\angle$**ACD** ≅ $\angle A_1C_1D_1$: Ապացուցել, որ Δ**BCD** ≅ $\Delta B_1C_1D_1$:

284. Ապացուցել, որ համընկնելի եռանկյուններում համապատասխանաբար համընկնելի կողմերի հանդիպակաց անկյունների կիսորդները համընկնելի են:

285. Ապացուցել, որ կիսականոնավոր եռանկյան սրունքների և հիմքի միջնակետերով որոշվող եռանկյունը կիսականոնավոր է:

286. Ապացուցել, որ կիսականոնավոր եռանկյան հիմքի հանդիպակաց անկյան կիսորդի ցանկացած կետ հավասարապես է հեռացված հիմքի ծայրակետերից (նկ. **128**):



Նկ. 128

287. Կիսականոնավոր եռանկյան անկյուններից մեկի աստիճանային չափը **60°** է: Ճշմարի՞տ է արդյոք, որ այդ եռանկյունը կանոնավոր է: Պատասխանը քննարկել համադասարանցիների հետ: Ի՞նչ արգելքներ են ասպարեզ գալիս այդ հարցին պատասխանելիս:

288. Ապացուցել, որ ցանկացած եռանկյան մեջ ավելի մեծ անկյան դիմաց դասավորված է ավելի մեծ կողմ:

289. **KLM** եռանկյան մեջ **KL = 5,12** և **LM = 0,63**: Որոշել **KM** կողմի երկարությունը, եթե այն արտահայտվում է ամբողջ թվով:

290. Ապացուցել, որ եռանկյան ցանկացած կողմի երկարությունը փոքր է այդ եռանկյան կիսապարագծից:

291. **DEF** և **MNP** եռանկյուններում **EF** ≅ **NP, DF** ≅ **MP** և ∠**F** ≅ ∠**P**: **E** և **D** անկյունների կիսորդները հատվում են **O** կետում, իսկ **M** և **N** անկյունների կիսորդները՝ **K** կետում: Ապացուցել, որ Δ**DOE** ≅ Δ **MKN**:

292. **A** անկյան կիսորդին ուղղահայաց ուղիղը հատում է անկյան կողմերը **M** և **N** կետերում: Ապացուցել, որ **AMN** եռանկյունը կիսականոնավոր է:

293. Ապացուցել, որ կիսականոնավոր եռանկյունները համընկնելի են, եթե մի եռանկյան հիմքը և դրան առընթեր անկյունը համապատասխանաբար համընկնելի են մյուս եռանկյան հիմքին և դրան առընթեր անկյանը:

294. Կիսականոնավոր եռանկյան սրունքների միջնակետերով այդ սրունքներին տարված են ուղղահայացներ մինչև մյուս սրունքի հետ հատվելը: Ապացուցել, որ այդ ուղղահայացները համընկնելի են:

295. Ապացուցել, որ անկյան կողմերի վրա գագաթից հավասարապես հեռացված կետերում անկյան համապատասխան կողմերին տարված ուղղահայացների հատման կետը պատկանում է այդ անկյան կիսորդին:

296. **A** անկյան մի կողմի վրա տեղադրված են **AB, AC**, իսկ մյուս կողմի վրա դրանց համընկնելի **AM, AN** հատվածներ: Ապացուցել, որ **MC, NB** հատվածների հատման կետը պատկանում է **A** անկյան կիսորդին:

297. Ապացուցել, որ եթե մի եռանկյան երկու կողմերը և երրորդ կողմին տարված միջնագիծը համապատասխանաբար համընկնելի են մյուս եռանկյան երկու կողմերին և երրորդ կողմին տարված միջնագծին, ապա այդ եռանկյունները համընկնելի են:

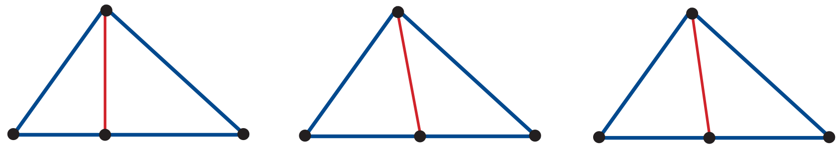
298. ABC և $A_1B_1C_1$ եռանկյուններում $\angle A \cong \angle A_1$, $\angle B \cong \angle B_1$ և հավասար են դրանց պարագծերը: Ապացուցել, որ $\Delta ABC \cong \Delta A_1B_1C_1$:

299. **AB** հատվածը **M** և **N** կետերով տրոհված է երեք զույգ առ զույգ համընկնելի մասերի: **AB** հատվածի միևնույն կողմում ընտրված են այնպիսի **C** և **D** կետեր, որ $AC \cong BD$ և $CN \cong DM$, $\angle DMB + \angle CNA = 140°$: Որոշել **DMB** և **CNA** անկյունների մեծությունները:

300. **ABC** և **ADC** կիսականոնավոր եռանկյուններն ունեն ընդհանուր **AC** հիմք, ընդ որում՝ **B** և **D** գագաթները դասավորված են **AC** ուղղի տարբեր կողմերում: Ապացուցել, որ $AC \perp BD$:

301. Կամայական **O** գագաթով ոչ փռված անկյան մի կողմի **A** կետով տարված է ուղիղ, որն անկյան մյուս կողմը հատում է **B** կետում, ուղղահայաց է այդ անկյան կիսորդին և հատում է այն **C** կետում (**B** և **C** կետերը տարբեր են): Ապացուցել, որ $\Delta AOC \cong \Delta BOC$:

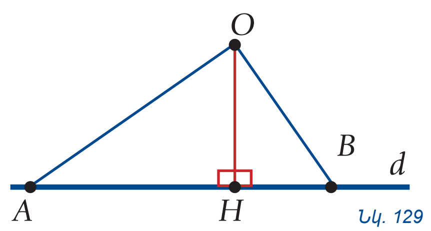
302. Որոշել օրինաչափությունը տրված եռանկյուններում: Օգտվել հետևյալ պնդումից «Բութանկյուն եռանկյան մեջ միջնագծերից, անկյունների կիսորդներից, բարձրություններից ամենակարճը...»: Ապացուցել այդ պնդումը և կազմել համանման օրինաչափություններ սուրանկյուն և ուղղանկյուն եռանկյունների դեպքում:



303. Օգտագործելով **Paint** ծրագիրը՝ կառուցել **ABC** եռանկյուն, այնուհետև **B** գագաթով տանել երկու ուղիղ այնպես, որ ստացվի. ա) կիսականոնավոր, բ) կանոնավոր եռանկյուն: Ներկայացնել կատարված գործողությունները քայլաշարի տեսքով:

§5. ՈՒՂՂԱՅԱՑ ԵՎ ԹԵՔ

Ընտրենք որևէ **O** կետ, որը չի պատկանում տրված **d** ուղղին, այդ կետով տանենք ուղղահայաց **d**-ին և ուղղահայացի հիմքը նշանակենք **H**-ով (նկ. **129**): Եթե **A** կետը պատկանում է **d** ուղղին և տարբեր է **H** կետից, ապա **OA** հատվածը կոչվում է **O** կետից **d** ուղղին տարված թեք: Այսպես, նկար **129**-ում **OA** և **OB** հատվածները **O կետից d ուղղին տարված թեք**: Ըստ եռանկյան անհավասարության՝



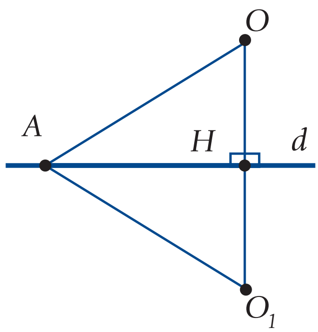
Նկ. 129

$$OH < OA + AH:$$

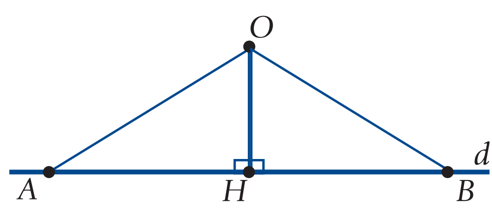
Սակայն տվյալ դեպքում հնարավոր է պնդել ավելին:

Թեորեմ 1: Եթե ուղղին չպատկանող կետից այդ ուղղին տարված են ուղղահայաց և թեքեր, ապա.
1) ուղղահայացը կարճ է ցանկացած թեքից,
2) երկու թեքեր, որոնց հիմքերը հավասարապես են հեռացված ուղղահայացի հիմքից, համընկնելի են,
3) երկու թեքերից ավելի երկար է այն, որի հիմքն ավելի հեռու է ուղղահայացի հիմքից:

Ապացուցում: 1) Դիցուք **OH**-ը և **OA**-ն **O** կետից **d** ուղղին տարված ուղղահայացն է և թեքը (նկ. **130**): **OH** ճառագայթի վրա կառուցենք այնպիսի $\mathbf{O_1}$ կետ, որ **H** կետը լինի $\mathbf{OO_1}$ հատվածի միջնակետը՝ $\mathbf{OH \cong HO_1}$: Ըստ եռանկյունների համընկնելիության առաջին հայտանիշի՝ $\mathbf{\Delta OAH \cong \Delta O_1AH}$, որտեղից հետևում է, որ $\mathbf{OA \cong O_1A}$: Ըստ եռանկյան անհավասարության՝ $\mathbf{OO_1 < OA + AO_1}$: Բայց $\mathbf{OO_1 = 2OH}$ և $\mathbf{OA + AO_1 = 2OA}$: Այստեղից ստանում ենք **2OA > 2OH** կամ, որը նույնն է, **OH < OA**:



Նկ. 130

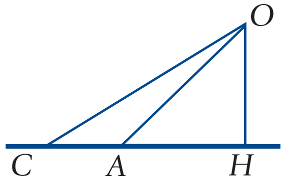


Նկ. 131

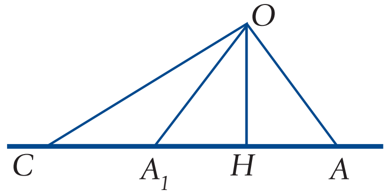
2) Դիցուք **OA**-ն և **OB**-ն այնպիսի թեքեր են, որ **AH ≅ HB** (նկ. **131**): Ըստ եռանկյունների համընկնելիության առաջին հայտանիշի՝ **ΔOAH ≅ ΔOBH**: Այստեղից հետևում է, որ **OA ≅ OB**:

3) Դիցուք տրված են այնպիսի **OA** և **OC** թեքեր, որ **HC > HA**: Հնարավոր է երկու դեպք.

ա) **A** և **C** կետերը դասավորված են **H** կետի միևնույն կողմում (նկ. **132**): **OAH** եռանկյան մեջ **A** անկյունը սուր է: Դրա կից անկյունը, որը **OAC** եռանկյան ներքին անկյուն է, բութ է: Հետևաբար, **OAC** եռանկյան ամենամեծ կողմը **OC** կողմն է, ուրեմն **OA < OC**:



Նկ. 132



Նկ. 133

բ) **A** և **C** կետերը դասավորված են **H** կետի տարբեր կողմերում (նկ. **133**): Եթե **HC** ճառագայթի վրա կառուցենք այնպիսի $\mathbf{A_1}$ կետ, որ $\mathbf{A_1H}$ ≅ **HA**, ապա այդ կետը կհայտնվի **H** և **C** կետերի միջև: **OAH** և $\mathbf{OA_1H}$ եռանկյունների ակնհայտ համընկնելիությունից եզրակացնում ենք, որ **OA** ≅ $\mathbf{OA_1}$: Ըստ ա) դեպքի՝ $\mathbf{OA_1}$< **OC**, ուրեմն **OA** < **OC**: Թեորեմն ապացուցված է:

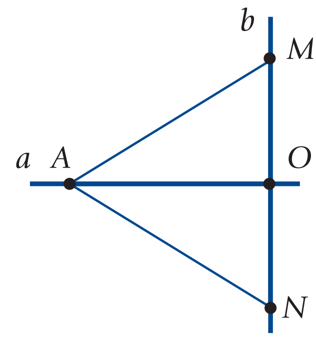
Այս թեորեմի ապացուցման ընթացքում մենք գործ ունեցանք երեք տեսակի եռանկյունների հետ՝ սուրանկյուն, ուղղանկյուն և բութանկյուն: Նկատենք, որ ուղղանկյուն եռանկյունը չի կարող ունենալ ավելի քան մեկ ուղիղ անկյուն, քանի որ հակառակ դեպքում համապատասխան կողմերը չեն հատվի: Նման պնդումը ճշմարիտ է նաև բութանկյուն եռանկյան համար՝ բութանկյուն եռանկյան երկու անկյունները սուր են:

Թեորեմ 2: Եթե միևնույն կետից միևնույն ուղղին տարված երկու թեքերը համընկնելի են, ապա դրանց հիմքերը հավասարապես են հեռացված այդ կետից այդ ուղղին տարված ուղղահայացի հիմքից:

Ապացուցում: Իրոք, դիցուք **O** կետից **d** ուղղին տարված են **OA** և **OB** թեքեր, ընդ որում՝ **OA** ≅ **OB**, իսկ **H**-ը՝ նույն կետից **d**-ին տարված ուղղահայացի հիմքն է (նկ. **131**): Ենթադրենք, որ այդ թեքերի հիմքերը հավասարապես չեն հեռացված **H** կետից: Ըստ նախորդ թեորեմի կստանանք, որ իրենք՝ թեքերը, համընկնելի չեն, որը հակասում է թեորեմի պայմանին: Ուրեմն այդ ենթադրությունը կեղծ էր և իրականում **AH** ≅ **HB**: Թեորեմն ապացուցված է:

Կետի հեռավորություն ուղղից կոչվում է այդ կետից ուղղին տարված ուղղահայաց հատվածի երկարությունը: Նախորդ թեորեմներից եզրակացնում ենք, որ այդ ուղղահայացն իրոք տրված կետից ամենակարծ ուղին է դեպի ուղիղը:

Դիցուք **a** և **b** փոխուղղահայաց ուղիղները հատվում են **O** կետում (նկ. **134**): Ուղիղներից որևէ մեկի, ասենք, **b**-ի վրա ընտրենք այնպիսի **M** և **N** կետեր, որ **O** կետը լինի **MN** հատվածի միջնակետը: Այնուհետև ընտրենք **a** ուղղի կամայական **A** կետ և այն միացնենք **M** և **N** կետերին:



Նկ. 134

AMO և **ANO** եռանկյունները համընկնելի են ըստ առաջին հայտանիշի: Ուրեմն մասնավորապես **AM** ≅ **AN**:

Քանի որ **A** կետը **a** ուղղի կամայական կետ է, ուստի այդ ուղղի ցանկացած կետ հավասարապես է հեռացված **MN** հատվածի ծայրակետերից: **a** ուղիղը կոչվում է **MN հատվածի միջնուղղահայաց**: Հետևաբար, տեղի ունի հետևյալ պնդումը:

Թեորեմ 3: Հատվածի միջնուղղահայացի ցանկացած կետ հավասարապես է հեռացված հատվածի ծայրակետերից:

Պարզ է, որ եթե կետը դասավորված չէ հատվածի միջնուղղահայացի վրա, ապա դրա հեռավորությունները հատվածի ծայրակետերից հավասար չեն:

Գործնական առաջադրանքներ

304. Գծել կամայական **ABC** եռանկյուն: Օգտվելով մասշտաբային քանոնից, գծագրական անկյունանդից և անկյունաչափից՝ **B** գագաթով տանել դրա բարձրությունը, **B** անկյան կիսորդը և BB_1 միջնագիծը: Չափել կառուցված հատվածները և համեմատել դրանց երկարությունները: Ո՞րն է ամենակարճ հատվածը: Համեմատել BB_1 միջնագծի և **BN** կիսորդի երկարությունները և կազմել երկրաչափական մեկնաբանումը:

305. Գծել կամայական **ABC** եռանկյուն: Մասշտաբային քանոնի և գծագրական անկյունարդի միջոցով կառուցել այդ եռանկյան **BH** բարձրությունը և հանդիպակաց կողմի միջնուղղահայացը: Նշանակել **M** և **N** տառերով այդ միջնուղղահայացի և եռանկյան համապատասխան կողմերի հատման կետերը: Համեմատել **AB** և **AH**, **AM** և **AN** հատվածները:

306. Գծել **AC** հիմքով **ABC** կիսականոնավոր եռանկյուն և կառուցել դրա **B** անկյան կիսորդը: **HB** ճառագայթի վրա ընտրել զույգ առ զույգ տարբեր **K, L, M** կետեր և **AKC, ALC, AMC** բեկյալների երկարությունները համեմատել **ABC** բեկյալի երկարության հետ: Ո՞ր դեպքում բեկյալի երկարությունը կլինի նվազագույն:

307. Գծել **AC** հիմքով **ABC** կիսականոնավոր եռանկյուն և կառուցել դրա **BH** բարձրությունը: **HC** ճառագայթի վրա ընտրել **C**-ից տարբեր **R, S, T** կետեր և չափել **HB** բարձրության, **CB** սրունքի և **RB, SB, TB** թեքերի երկարությունները: Համեմատել այդ թվերը և կազմել համապատասխան երկրաչափական մեկնաբանումները:

Խնդիրներ

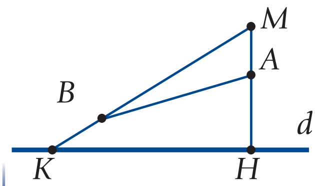
308. Ապացուցել, որ եռանկյան անկյան կիսորդը մեծ չէ այդ անկյան գագաթով տարված միջնագծից: Ո՞ր դեպքում են համընկնելի այդ հատվածները:

309. Ապացուցել, որ եռանկյան ցանկացած գագաթով տարված բարձրությունը մեծ չէ համապատասխան անկյան կիսորդից: Ո՞ր դեպքում են համընկնելի այդ հատվածները:

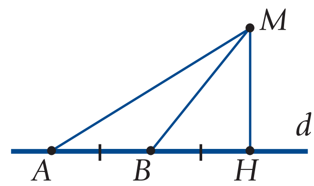
310. Ապացուցել, որ եթե երկու ուղղանկյուն եռանկյուններից մեկի էջերը համապատասխանաբար փոքր են մյուսի էջերից, ապա առաջին եռանկյան ներքնաձիգը փոքր է մյուսի ներքնաձիգից:

311. Ապացուցել, որ **C** ուղիղ անկյունով **ABC** եռանկյան **AC** և **BC** էջերի ցանկացած երկու ներքին կետերը միացնող հատվածը փոքր է **ABC** եռանկյան **AB** ներքնաձիգից:

312. **M** կետով չանցնող d ուղղին տարված են **MH** ուղղահայացը և **MK** թեքը: **A** և **B** կետերը համապատասխանաբար պատկանում են **MH** և **MK** հատվածներին (նկ. **135**): Ապացուցել, որ **AB < MK**:



Նկ. 135



Նկ. 136

313. **M** կետով չանցնող **d** ուղղին տարված են **MA** և **MB** թեքերը, նաև **MH** ուղղահայացը (նկ. **136**) այնպես, որ **B** կետը **AH** հատվածի միջնակետն է: Հնարավո՞ր է արդյոք **MA > 2 MB** անհավասարությունը:

314. **A** կետից **d** ուղղին տարված է **AH** ուղղահայաց, իսկ **K** կետից՝ **KL** թեք: **AH** և **KL** հատվածները հատվում են **O** կետում, ընդ որում՝ **AO ≅ OL, ∠OAK < ∠OLH**: Ապացուցել, որ **KL** հատվածը փոքր է **A** կետից **d** ուղղին տարված ցանկացած թեքից:

315. **ABC** եռանկյան մեջ **AB = 10** սմ, **AC = 1** սմ: Հնարավո՞ր է արդյոք, որ այդ եռանկյան որևէ կողմի երկարությունը **100** անգամ գերազանցի մյուս կողմի երկարությունը: Պատասխանը հիմնավորել և քննարկել համադասարանցիների հետ:

316. **M** կետով չանցնող **d** ուղղին տարված է **m** ուղղահայաց ուղիղ, այնուհետև **M** կետով տարված է **n** ուղղահայաց **m** ուղղին: Ապացուցել, որ **d** և **n** ուղիղները չեն հատվում:

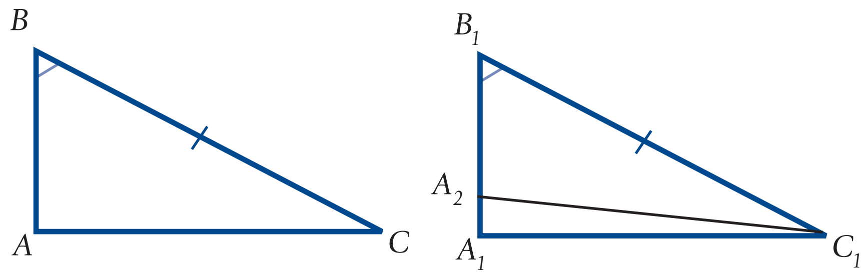
317. Ապացուցել, որ միևնույն ուղղին ուղղահայաց երկու ուղիղները չեն կարող հատվել:

318. Ապացուցել, որ միևնույն ուղղի հետ համընկնելի անկյուններ կազմող ուղիղները չեն կարող հատվել:

§6. ՈՒՂՂԱՆԿՅՈՒՆ ԵՌԱՆԿՅՈՒՆՆԵՐ

Նախ դիտարկենք ուղղանկյուն եռանկյունների հավասարության հայտանիշները: Ուղղանկյուն եռանկյան երկու էջերի կազմած անկյունն ուղիղ է, իսկ ցանկացած երկու ուղիղ անկյուն հավասար են: Եռանկյունների հավասարության առաջին հայտանիշից հետևում է, որ եթե մի ուղղանկյուն եռանկյան էջերը համապատասխանաբար հավասար են մյուս եռանկյան էջերին, ապա այդ եռանկյունները հավասար են: Այնուհետև, եռանկյունների հավասարության երկրորդ հայտանիշից հետևում է, որ եթե մի ուղղանկյուն եռանկյան էջը և դրան առընթեր սուր անկյունը համապատասխանաբար հավասար են մյուսի էջին և դրան առընթեր սուր անկյանը, ապա այդ եռանկյունները հավասար են:

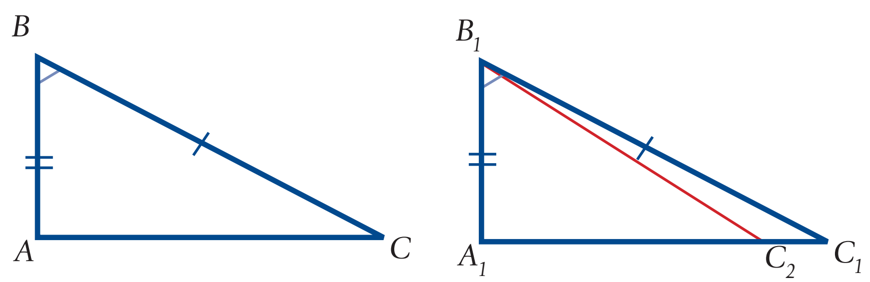
Թեորեմ 1: Եթե մի ուղղանկյուն եռանկյան ներքնաձիգը և սուր անկյունը համապատասխանաբար հավասար են մյուսի ներքնաձիգին և սուր անկյանը, ապա այդ եռանկյունները հավասար են:



Նկ. 137

Ապացուցում: Դիցուք **ABC** և $A_1B_1C_1$ ուղղանկյուն եռանկյուններում **BC** և B_1C_1 ներքնաձիգները և **B** ու B_1 սուր անկյունները հավասար են (նկ. **137**): Ապացուցենք, որ $\Delta ABC \cong \Delta A_1B_1C_1$: Դրա համար բավական է ստուգել, որ $AB \cong A_1B_1$: Ենթադրենք, որ այդ կողմերը հավասար չեն: Հնարավոր է երկու դեպք. $AB < A_1B_1$ կամ $AB > A_1B_1$: Դիտարկենք $A_1B_1 > AB$ դեպքը: B_1A_1 ճառագայթի վրա տեղադրենք B_1A_2 հատված, որը հավասար է **BA** հատվածին: Քանի որ $AB < A_1B_1$, ուստի A_2 կետը դասավորված է B_1 և A_1 կետերի միջև. B_1 - A_2 - A_1: Ըստ եռանկյունների համընկնելիության առաջին հայտանիշի՝ $\Delta ABC \cong \Delta A_2B_1C_1$: Այստեղից եզրակացնում ենք, որ $\angle B_1A_2C_1 \cong \angle BAC$, այսինքն՝ $\angle B_1A_2C_1 = 90°$. Ստացանք, որ C_1 կետից B_1A_1 ուղղին տարված է երկու ուղղահայաց (C_1A_1 և C_1A_2): Այս հակասությունը կեղծ ենթադրության հետևանք է: Նույնպիսի հակասության է հանգեցնում **AB < AB** ենթադրությունը: Ուրեմն իրականում $A_1B_1 \cong AB$: Ըստ եռանկյունների համընկնելիության առաջին հայտանիշի՝ **ABC** և $A_1B_1C_1$ եռանկյունները համընկնելի են: Թեորեմն ապացուցված է:

> **Թեորեմ 2:** Եթե մի ուղղանկյուն եռանկյան ներքնաձիգը և էջը համապատասխանաբար համընկնելի են մյուսի ներքնաձիգին և էջին, ապա այդ եռանկյունները համընկնելի են:



Նկ. 138

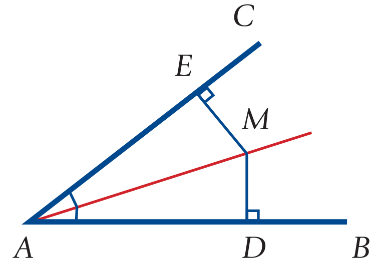
Ապացուցում: Դիցուք **ABC** և $A_1B_1C_1$ ուղղանկյուն եռանկյուններում $AB \cong A_1B_1$, $BC \cong B_1C_1$, որտեղ **BC**-ն և B_1C_1-ը ներքնաձիգներն են (նկ. **138**): Ապացուցենք, որ $\Delta ABC \cong \Delta A_1B_1C_1$: Դրան կարելի է հասնել եռանկյունների համընկնելիության երրորդ հայտանիշի ապացուցմանը համանման եղանակով (նկ. **138**): Ենթադրենք, որ **AC** էջը համընկնելի չէ A_1C_1-ին: Այդ դեպքում կամ $AC < A_1C_1$, կամ $AC > A_1C_1$: Քննարկենք առաջին դեպքը: A_1C_1 ճառագայթի վրա A_1 գագաթից ըստ աքսիոմ **10°**- ի տեղադրենք **AC** էջին համընկնելի A_1C_2 հատված (նկ. **137**): Պարզ է, որ C_2 կետը դասավորված է A_1 և C_1 կետերի միջև A_1 - C_2 - C_1: Ըստ եռանկյունների համընկնելիության առաջին հայտանիշի՝ **ABC** և $A_1B_1C_2$ եռանկյունները համընկնելի են, ուրեմն մասնավորապես $BC \cong B_1C_2$: Բայց ըստ թեորեմի պայմանի՝ $BC \cong B_1C_1$, հետևաբար $B_1C_2 \cong B_1C_1$:

Ստացանք, որ $\Delta C_2B_1C_1$-ը կիսականոնավոր եռանկյուն է: Մյուս կողմից, $\angle A_1C_2B_1$-ը սուր անկյուն է, և դրա կից $B_1C_2C_1$ անկյունը բութ անկյուն է: Դա նշանակում է, որ $C_2B_1C_1$ եռանկյան մեջ B_1C_1 կողմը մեծ է B_1C_2 կողմից: Նույնպիսի հակասության կհանգենք՝ ենթադրելով, որ $AC > A_1C_1$: Ուրեմն իրականում $AC \cong A_1C_1$, և ըստ եռանկյունների համընկնելիության երրորդ հայտանիշի՝ **ABC** և $A_1B_1C_1$ ուղղանկյուն եռանկյունները համընկնելի են: Թեորեմն ապացուցված է:

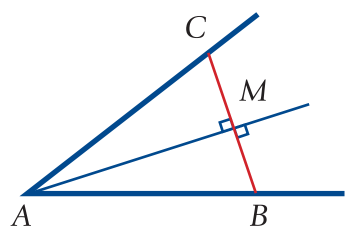
Կիրառենք ուղղանկյուն եռանկյունների համընկնելիության հայտանիշները անկյան կիսորդի հիմնական հատկությունը հիմնավորելու համար:

Թեորեմ 3: Եթե ոչ փռված անկյան ներքին տիրույթի կետը պատկանում է այդ անկյան կիսորդին, ապա այն հավասարապես է հեռացված անկյան կողմերից:

Ապացուցում: Դիցուք **BAC** ոչ փռված անկյան ներքին տիրույթի **M** կետը պատկանում է այդ անկյան կիսորդին (նկ. **139**): Ցույց տանք, որ այն հավասարապես է հեռացված **AB** և **AC** ուղիղներից: Դրա համար **M** կետով այդ ուղիղներին տանենք **MD** և **ME** ուղղահայացները և համեմատենք **AMD** և **AME** ուղղանկյուն եռանկյունները: Այդ եռանկյուններն ունեն ընդհանուր ներքնաձիգ և մեկական համընկնելի սուր անկյուն (**A** գագաթում): Ուրեմն այդ եռանկյունները համընկնելի են ըստ թեորեմ 1-ի: Այստեղից հետևում է, որ այդ սուր անկյունների հանդիպակաց **MD** և **ME** ուղղահայացները համընկնելի են: Դա նշանակում է, որ **M** կետը հավասարապես է հեռացված անկյան կողմերից: Թեորեմն ապացուցված է:



Նկ. 139



Նկ. 140

Հետևանք: Փռված անկյունից տարբեր անկյան կիսորդի ցանկացած **M** կետում այդ կիսորդին տարված ուղղահայացը հատում է անկյան կողմերը **B** և **C** կետերում, որոնք հավասարապես են հեռացված **M** կետից և հավասարապես են հեռացված այդ անկյան գագաթից:

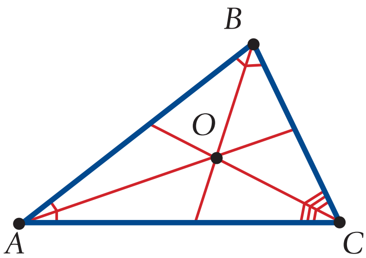
Ապացուցում: Դիցուք **A** գագաթով ոչ փռված անկյան կիսորդի **M** կետում կառուցված դրա ուղղահայացը հատում է այդ անկյան կողմերը **B** և **C** կետերում (նկ. **140**): Ըստ եռանկյունների համընկնելիության երկրորդ հայտանիշի՝ **ACM** և **ABM** ուղղանկյուն եռանկյունները համընկնելի են: Այստեղից հետևում է, որ **MC** ≅ **MB** և **AC** ≅ **AB**: Պնդումն ապացուցված է:

Թեորեմ 4: Եթե ոչ փռված անկյան ներքին տիրույթի կետը հավասարապես է հեռացված անկյան կողմերից, ապա այն պատկանում է այդ անկյան կիսորդին:

Ապացուցում: Դիցուք տրված է **BAC** ոչ փռված անկյուն և **M** կետ, որը հավասարապես է հեռացված այդ անկյան կողմերից, այսինքն՝ **MD** ≅ **ME**: Այստեղ **MD** և **ME** հատվածները **M** կետից համապատասխանաբար **AB** և **AC** ուղիղներին տարված ուղղահայացներն են (նկ. **139**): Ցույց տանք, որ **AM**-ը **BAC** անկյան կիսորդն է: Համեմատենք **AMD** և **AME** ուղղանկյուն եռանկյունները: Դրանք համընկնելի են ըստ ընդհանուր ներքնաձիգի և մեկական համընկնելի էջի: Հետևաբար, այդ էջերի հանդիպակաց անկյունները նույնպես համընկնելի են, այսինքն՝ **AM**-ը **BAC** անկյան կիսորդն է: Թեորեմն ապացուցված է:

Թեորեմ 5: Ցանկացած եռանկյան կիսորդները հատվում են միևնույն կետում:

Ապացուցում: Դիտարկենք կամայական **ABC** եռանկյան **A** և **B** անկյունների կիսորդները և նշանակենք **O** տառով դրանց հատման



Նկ. 141

կետը (նկ. **141**): Քանի որ **O** կետը պատկանում է **A** անկյան կիսորդին, ուստի այն հավասարապես է հեռացված **AB** և **AC** կողմերից: Մյուս կողմից, **O** կետը պատկանում է նաև **B** անկյան կիսորդին, ուրեմն այն հավասարապես է հեռացված **BA** և **BC** կողմերից: Հետևաբար, **O** կետի հեռավորությունը **BC** կողմից հավասար է այդ կետի հեռավորությանը **AC** կողմից: Դա նշանակում է, որ **O** կետը պատկանում է նաև **C** անկյան կիսորդին: Այսպիսով, **ABC** եռանկյան կիսորդները հատվում են միևնույն **O** կետում: Թեորեմն ապացուցված է:

Գործնական առաջադրանքներ

319. Գծագրական անկյունարդի միջոցով գծել կամայական ուղղանկյուն եռանկյուն և նշել դրա բարձրությունները, միջնագծերը և անկյունների կիսորդները: Ինչպիսի՞ առանձնահատկություն ունեն այդ եռանկյան բարձրությունները:

320. Ոչ փռված անկյան գագաթից անկյան կողմերի վրա տեղադրել համընկնելի հատվածներ: Դրանց երկրորդ ծայրակետերում կառուցել անկյան համապատասխան կողմերի ուղղահայացները, նշել դրանց հատման կետը: Ինչպիսի՞ն է այդ կետի դասավորությունը անկյան կողմերի նկատմամբ:

321. Գծել կիսականոնավոր ուղղանկյուն եռանկյուն և նշել դրա կողմերի միջնակետերը: Ի՞նչ եռանկյուն են որոշում այդ կետերը:

322. Գծել կամայական եռանկյուն և այն ներկայացնել. ա) երկու, բ) չորս ուղղանկյուն եռանկյունների միավորման տեսքով:

323. Գծագրել ուղղանկյուն եռանկյան՝ կիրառելով. **Paint** համակարգչային ծրագիրը:

324. Որոշվու՞մ է արդյոք ուղղանկյուն եռանկյունը ներքնաձիգով և դրան տարված բարձրությամբ: Պատասխանը հիմնավորել և քննարկել համադասարանցիների հետ:

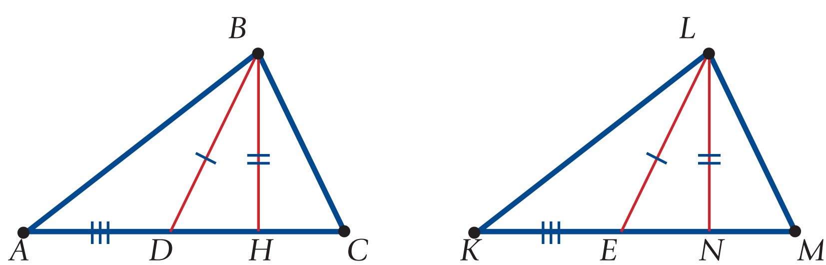
325. **AB** և **CD** ուղղահայաց հատվածները հատվում են իրենց ընդհանուր **O** միջնակետում: Ապացուցել, որ **AC** ≅ **BD**:

326. Ապացուցել, որ **AC** հիմքով **ABC** կիսականոնավոր եռանկյան **B** անկյան կիսորդն անցնում է **A** և **C** գագաթներում արտաքին անկյունների կիսորդները պարունակող ուղիղների հատման կետով:

327. **ABC** և **ADC** ուղղանկյուն եռանկյուններն ունեն ընդհանուր **AC** ներքնաձիգ և դասավորված են **AC** ուղղի տարբեր կողմերում: Ապացուցել, որ եթե **BC** ≅ **AD**, ապա ∠**BAC** ≅ ∠**DCA**:

328. Կիսականոնավոր եռանկյան պարագիծը **37** սմ է, մի կողմը մեծ է մյուսից **7** սմ-ով: Որոշել այդ եռանկյան կողմերի երկարությունը, եթե արտաքին անկյուններից մեկը սուր անկյուն է:

329. Դիցուք մի եռանկյան կողմը և դրան հանդիպակաց գագաթից տարված միջնագիծն ու բարձրությունը համապատասխանաբար համընկնելի են մյուսի կողմին և այդ կողմին տարված միջնագծին ու բարձրությանը: Ապացուցել, որ այդ եռանկյունները համընկնելի են:



Նկ. 142

Ապացուցում: Դիտարկենք **ABC** և **KLM** եռանկյունները, որոնցում **AC** և **KM** կողմերը, **BD** և **LE** միջնագծերը, **BH** և **LN** բարձրությունները համընկնելի են (նկ. **142**):

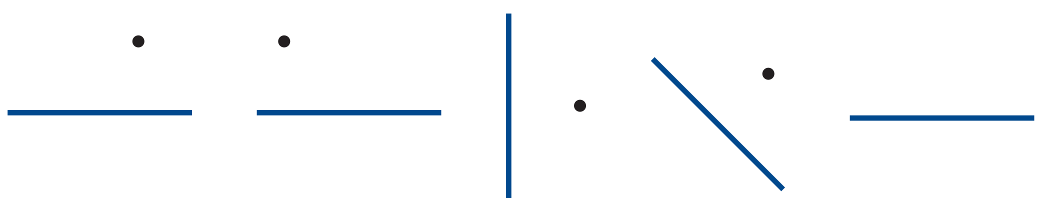
ΔDBH ≅ ΔELN ըստ էջի և ներքնաձիգի: Ուրեմն **DH ≅ EN**, հետևաբար **AH ≅ KN** և նաև **HC ≅ NM**: Այստեղից **ΔABH ≅ ΔKLN** և **ΔBCH ≅ ΔLMN** ըստ երկու էջերի: Այստեղից ստանում ենք **AB ≅ KL** և **BC ≅ LM**: Ուրեմն **ABC** և **KLM** եռանկյունները համընկնելի են ըստ երեք կողմերի: Պնդումն ապացուցված է:

330. **ABC** եռանկյան AH_1 և CH_3 բարձրությունները հատվում են **H** կետում, ընդ որում՝ **AH ≅ CH**: Ապացուցել, որ **ABC** եռանկյունը կիսականոնավոր է:

331. **PQR** եռանկյան **PQ** կողմի **S** կետից այդ կողմին տարված ուղղահայացը հատում է եռանկյան **PR** կողմը **T** կետում: Որոշել **TQR** եռանկյան պարագիծը, եթե հայտնի է, որ **∠PTS ≅ ∠STQ, PR = 25, QR = 15**:

332. Ապացուցել, որ եռանկյան կողմերի ցանկացած երկու կետերի հեռավորությունը չի կարող գերազանցել եռանկյան ամենամեծ կողմի երկարությունը:

333. Բացահայտել երկրաչափական պատկերների հաջորդականության օրինաչափությունը և համապատասխան ձևով լրացնել վերջին պատկերը:



334. Ապացուցել, որ կիսականոնավոր եռանկյան հիմքի գագաթներից տարված երկու բարձրությունները համընկնելի են:

335. Կառուցել եռանկյուն, որի կողմերի երկարություններն են. ա) **3** սմ, **4** սմ, **5** սմ, բ) **8** սմ, **15** սմ, **17** սմ, գ) **7** սմ, **24** սմ, **25** սմ: Ի՞նչ եռանկյուններ ստացվեցին:

336. Ապացուցել, որ երկու սուրանկյուն եռանկյուններ համընկնելի են, եթե մի եռանկյան կողմը և այդ կողմի ծայրակետերից տարված բարձրությունները համապատասխանաբար համընկնելի են մյուս եռանկյան կողմին և այդ կողմի ծայրակետերից տարված բարձրություններին:

337. Անկյան ներսում տրված է **M** կետ: Գծել **M** կետով անցնող ուղիղ, որն այդ անկյան կողմերից անջատում է համընկնելի հատվածներ:

II ԳԼԽԻ ԿՐԿՆՈՒԹՅԱՆ ՀԱՐՑԵՐ

338. Բացատրել, թե որ պատկերն է կոչվում եռանկյուն: Գծել կամայական եռանկյուն և նշել դրա հիմնական տարրերը:
339. Ո՞ր հատկանիշներով են համեմատում եռանկյունները:
340. Որո՞նք են եռանկյան հիմնական երկրաչափական բնութագրիչները:
341. Որոշվո՞ւմ է արդյոք եռանկյունը երեք կողմերով:
342. Որոշվո՞ւմ է արդյոք եռանկյունը երեք անկյուններով:
343. Ի՞նչ է եռանկյան պարագիծը, և ի՞նչ է այն բնութագրում:
344. Ո՞ր եռանկյուններն են համարվում համընկնելի:
345. Ի՞նչ են արտահայտում եռանկյունների համընկնելիության հայտանիշները: Ձևակերպել և ապացուցել եռանկյունների համընկնելիության առաջին հայտանիշը:
346. Ո՞ր հատվածն է կոչվում տրված կետից տրված ուղղին տարված ուղղահայաց: Ձևակերպել և ապացուցել տրված կետից տրված ուղղին տարված ուղղահայացի մասին թեորեմը:
347. Նկարագրել եռանկյունների դասակարգումն ըստ անկյունների:
348. Նկարագրել եռանկյունների դասակարգումն ըստ կողմերի:
349. Ո՞ր հատվածն է կոչվում եռանկյան միջնագիծ: Քանի՞ միջնագիծ ունի եռանկյունը:
350. Ո՞ր հատվածն է կոչվում եռանկյան բարձրություն: Քանի՞ բարձրություն ունի եռանկյունը:

351. Ո՞ր հատվածն է կոչվում եռանկյան կիսորդ: Քանի՞ անկյան կիսորդ ունի եռանկյունը:

352. Նկարագրել եռանկյունների դասակարգումն ըստ արտաքին անկյունների:

353. Ո՞ր եռանկյուններն են կոչվում կիսականոնավոր: Ձևակերպել և ապացուցել կիսականոնավոր եռանկյունների հատկությունները:

354. Ո՞ր եռանկյուններն են կոչվում կանոնավոր: Ձևակերպել և ապացուցել կանոնավոր եռանկյունների հատկությունները:

355. Ձևակերպել և ապացուցել եռանկյունների համընկնելիության երկրորդ հայտանիշը:

356. Ձևակերպել և ապացուցել եռանկյունների համընկնելիության երրորդ հայտանիշը:

357. Բացատրել, թե անկյունաչափի միջոցով ինչպես կառուցել տրված անկյանը համընկնելի անկյուն:

358. Ձևակերպել և ապացուցել ուղղանկյուն եռանկյունների համընկնելիության հայտանիշները:

359. Ձևակերպել և ապացուցել անկյան կիսորդի բնութագրիչ հատկությունը

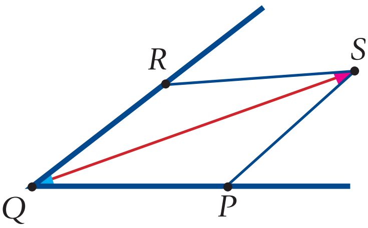
ԼՐԱՑՈՒՑԻՉ ԽՆԴԻՐՆԵՐ

360. **ABC** եռանկյան պարագիծը հավասար է **15** սմ: **AB** կողմը մեծ է **BC** կողմից **2** սմ-ով, իսկ **AC** կողմը **BC** կողմից փոքր է **1** սմ-ով: Հաշվել **ABC** եռանկյան կողմերի երկարությունները:

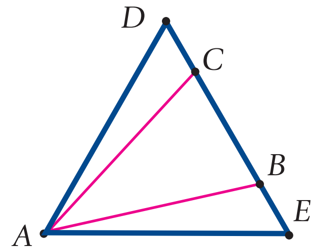
361. Կիսականոնավոր եռանկյան հիմքը սրունքից մեծ է **2** սմ-ով, բայց սրունքների երկարությունների գումարից փոքր է **3** սմ-ով: Հաշվել եռանկյան կողմերի երկարությունները:

362. Կիսականոնավոր եռանկյան հիմքի երկարությունը **8** սմ է: Սրունքին տարված միջնագիծը եռանկյունը տրոհում է երկու եռանկյունների այնպես, որ մի եռանկյան պարագիծը **2** սմ-ով մեծ է մյուսի պարագծից: Հաշվել տրված եռանկյան սրունքի երկարությունը:

363. Նկար **143**-ում **QS** ճառագայթը **PQR** անկյան կիսորդն է, իսկ **SQ** ճառագայթը՝ **PSR** անկյան կիսորդը: Ապացուցել, որ **PQS** և **RQS** եռանկյունները համընկնելի են:



Նկ. 143



Նկ. 144

364. Նկար 144-ում պատկերված է **DE** հիմքով **ADE** կիսականոնավոր եռանկյուն: Ապացուցել, որ. **ա**) եթե **BD** ≅ **CE**, ապա ∠**CAD** ≅ ∠**BAE**, **բ**) եթե ∠**CAD**≅ ∠**BAE**, ապա **BD** ≅ **CE** և **AB** ≅ **AC**:

365. Կիսականոնավոր եռանկյան հիմքի երկարությունը երկու անգամ փոքր է սրունքի երկարությունից: Որոշել այդ եռանկյան կողմերի երկարությունները, եթե դրա պարագիծը **50** սմ է:

366. Ապացուցել, որ եթե մի ուղղանկյուն եռանկյան սուր անկյունը և ներքնաձիգին տարված բարձրությունը համընկնելի են մյուս ուղղանկյուն եռանկյան սուր անկյանը և ներքնաձիգին տարված բարձրությանը, ապա այդ եռանկյունները համընկնելի են:

367. Ապացուցել, որ ցանկացած եռանկյան ավելի մեծ կողմին համապատասխանում է ավելի փոքր բարձրություն:

368. Կարո՞ղ են արդյոք միևնույն եռանկյան երկու անկյունների կիսորդները լինել ուղղահայաց:

369. **ABC** եռանկյան **A** և **B** անկյունների կիսորդները հատվում են **O** կետում: Ճշմարի՞տ է արդյոք, որ **AOB** անկյունը բութ է:

370. Որոշել **AC** հիմքով **ABC** կիսականոնավոր եռանկյան $\mathbf{BB_1}$ միջնագծի երկարությունը, եթե **ABC** եռանկյան պարագիծը **32** սմ է, իսկ $\mathbf{ABB_1}$ եռանկյան պարագիծը՝ **24** սմ:

371. Ապացուցել, որ կամայական եռանկյան կողմերի միջնակետերը չեն կարող որոշել **ա**) կանոնավոր, **բ**) կիսականոնաոր եռանկյուն:

372. **ABC** կիսականոնավոր եռանկյան կողմերի վրա տեղադրված են **AD, BE, CF** զույգ առ զույգ համընկնելի հատվածներ: **D, E, F** կետերը զույգ առ զույգ միացված են հատվածներով: Ո՞ր դեպքում է **DEF** եռանկյունը. ա) կանոնավոր, բ) կիսականոնավոր:

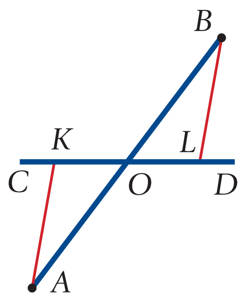
373. **AB** և **CD** հատվածները հատվում են իրենց **O** ընդհանուր միջնակետում: Այդ հատվածների վրա նշված են այնպիսի **K** և **L** կետեր, որ **AK** ≅ **BL** (նկ. **145**): Ապացուցել, որ **OK** ≅ **OL:**

374. **ABC** կանոնավոր եռանկյան կողմերը շարունակված են **AD, CE, BF** զույգ առ զույգ համընկնելի հատվածներով (նկ. **146**): Ապացուցել, որ **DEF**-ը կանոնավոր եռանկյուն է:

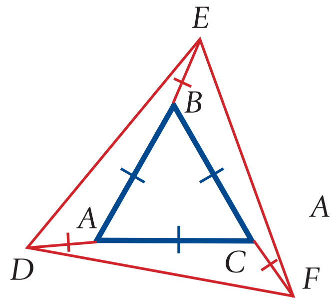
375. **d** ուղղի վրա տրված են **A, B, C** կետեր: **D** կետը չի պատկանում այդ ուղղին: Ապացուցել, որ **AD, BD, CD** հատվածներից առնվազն երկուսը համընկնելի չեն:

376. **ABC** կիսականոնավոր եռանկյան **AB** և **AC** սրունքների վրա նշված են **M** և **N** կետեր այնպես, որ ∠**MKB** ≅ ∠**NKC**, որտեղ **K-**ն **BC** հիմքի միջնակետն է: Ապացուցել, որ **BN** ≅ **CM**:

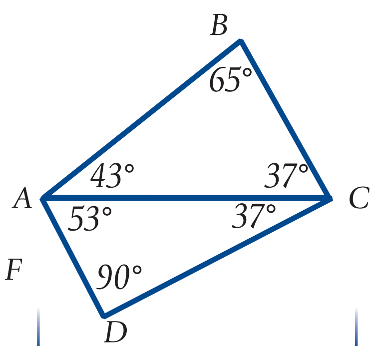
377. Նկար **147**-ում պատկերված են ընդհանուր **AC** կողմով **ABC** և **ADC** եռանկյուններ և նշված են դրանց ներքին անկյունները: Որոշել առաջացած հինգ հատվածներից ամենամեծը:



Նկ. 145



Նկ. 146



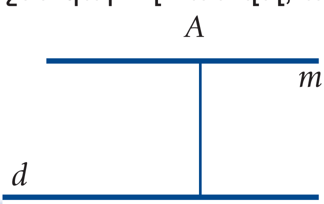
Նկ. 147

ԳԼՈՒԽ III

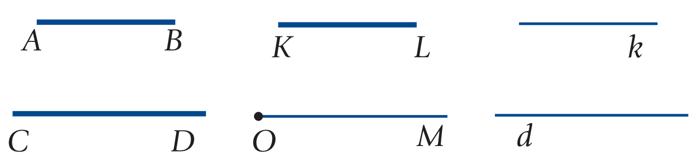
ԶՈՒԳԱՀԵՌ ՈՒՂԻՂՆԵՐ

§1. ԵՐԿՈՒ ՈՒՂԻՂՆԵՐԻ ԶՈՒԳԱՀԵՌՈՒԹՅԱՆ ՀԱՅՏԱՆԻՇՆԵՐԸ

Արդեն նշվել է, որ հարթության մեջ երկու ուղիղները կա՛մ ունեն ընդհանուր կետ, այսինքն՝ հատվում են, կա՛մ էլ չունեն ընդհանուր կետ, այսինքն՝ չեն հատվում: Ուսումնասիրենք երկրորդ դեպքը: Երկու ուղիղները հարթության մեջ կոչվում են **զուգահեռ**, եթե չեն հատվում: **a** և **b** ուղիղների զուգահեռությունը նշանակում են այսպես. **a || b**: Ընտրենք կամայական **d** ուղիղ և դրան չպատկանող որևէ **A** կետ (նկ. **148**): **A** կետից տանենք **AH** ուղղահայաց **d** ուղղին և այնուհետև **A** կետից տանենք **m** ուղղահայաց **AH** ուղղին: Արդեն գիտենք, որ **d** և **m** ուղիղները չեն կարող հատվել, այսինքն՝ զուգահեռ են:

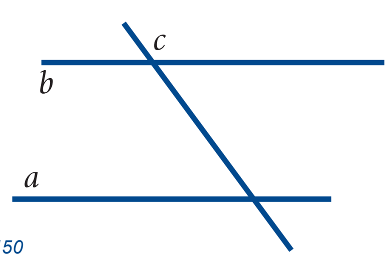


Նկ. 148

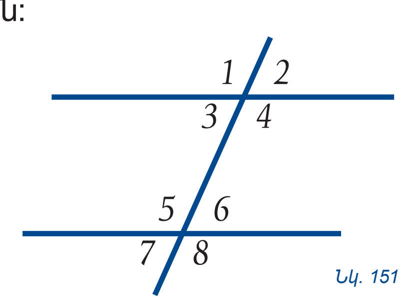


Նկ. 149

Զուգահեռ ուղիղների հետ մեկտեղ երբեմն օգտագործում են երկու հատվածների, հատվածի և ուղղի, երկու ճառագայթների, ճառագայթի և հատվածի և այլնի զուգահեռությունը: Այդպիսի երկու պատկերները կոչվում են **զուգահեռ**, եթե զուգահեռ են այդ պատկերներն ընդգրկող ուղիղները (նկ. **149**): Օրինակ՝ **KL** հատվածը զուգահեռ է **OM** ճառագայթին, եթե **AB** և **OM** ուղիղները զուգահեռ են:



Նկ. 150



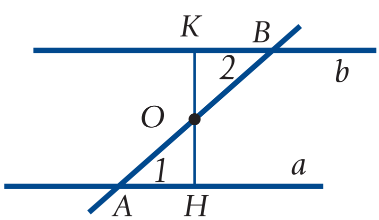
Նկ. 151

c ուղիղը կոչվում է **a** և **b** ուղիղների **հատող**, եթե այն հատում է այդ ուղիղները մեկական կետում (նկ. **150**): **a** և **b** ուղիղները **c** հատողով հատելիս առաջանում է ութ անկյուն, որոնք նկար **151**-ում համարակալված են: Այդ անկյունների որոշ զույգերն ունեն հատուկ անվանումներ. **խաչադիր անկյուններ՝** **3** և **6, 4** և **5, միակողմանի անկյուններ՝** **3** և **5, 4** և **6, համապատասխան անկյուններ՝** **1** և **5, 2** և **6, 3** և **7, 4** և **8**:

Այժմ դիտարկենք երկու ուղիղների զուգահեռության հայտանիշներ:

> **Թեորեմ 1:** Եթե երկու ուղիղներ հատողով հատելիս առաջանում են համընկնելի խաչադիր անկյուններ, ապա այդ երկու ուղիղները զուգահեռ են:

Ապացուցում: Դիցուք **a** և **b** ուղիղները **AB** հատողով հատելիս առաջացել են համընկնելի խաչադիր անկյուններ՝ $\angle$**1** ≅ $\angle$**2** (նկ. **152**): Ապացուցենք, որ **a ||** **b**: Եթե $\angle$**1**-ը և $\angle$**2**-ը ուղիղ անկյուններ են (նկ. **152**), ապա **a** և **b** ուղիղներից յուրաքանչյուրը ուղղահայաց է **AB** ուղղին և, հետևաբար, այդ ուղիղները զուգահեռ են: Եթե **AB** հատողն ուղղահայաց չէ **a** և **b** ուղիղներին, ապա **AB** հատվածի **O** միջնակետից տանենք **OH** ուղղահայաց **a** ուղղին և այնուհետև **B** կետից **b** ուղղի վրա **HA** ուղղությամբ տեղադրենք **HA** հատվածին համընկնելի **BK** հատված (նկ. **152**): **OHA** և **OKB** եռանկյունները համընկնելի են, քանի որ **AO** ≅ **OB, HA** ≅ **BK,** $\angle$**1** ≅ $\angle$**2**, ուստի $\angle$**BKO** ≅ $\angle$**AHO = 90°** պայմաններից հետևում է, որ **H, O** և **K** կետերը դասավորված են միևնույն ուղղի վրա: Ուրեմն **a** և **b** ուղիղներն ուղղահայաց են **HK** ուղղին, այսինքն՝ զուգահեռ են: Թեորեմն ապացուցված է:



Նկ. 152

> **Թեորեմ 2:** Եթե երկու ուղիղներ հատողով հատելիս համապատասխան անկյունները համընկնելի են, ապա այդ ուղիղները զուգահեռ են:

Ապացուցում: Դիցուք **a** և **b** ուղիղները **c** հատողով հատելիս որևէ զույգ համապատասխան անկյունները համընկնելի են, օրինակ՝ $\angle$**1** ≅

$\angle$**5**: $\angle$**1**-ը համընկնելի է իրեն ուղղաձիգ $\angle$**4**-ին, իսկ վերջինս՝ խաչադիր է $\angle$**5**-ին: Ուրեմն, ըստ պայմանի, $\angle$**4** ≅ $\angle$**5**: Ըստ նախորդ թեորեմի՝ **a** ուղիղը զուգահեռ է **b** ուղղին: Թեորեմն ապացուցված է:

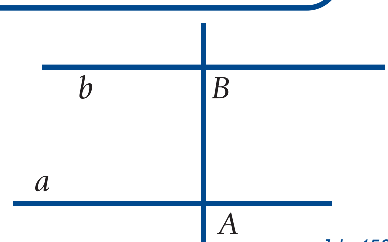
Թեորեմ 3: Եթե երկու ուղիղներ հատողով հատելիս միակողմանի անկյունների մեծությունների գումարը հավասար է 180°-ի, ապա այդ ուղիղները զուգահեռ են:

Ապացուցում: Դիցուք **a** և **b** ուղիղները **c** հատողով հատելիս որևէ երկու միակողմանի անկյունների մեծությունների գումարը հավասար է **180°**-ի, ասենք՝ $\angle$**3 + **$\angle$**5 = 180°** (նկ. **151**): Մյուս կողմից $\angle$**3**-ը և $\angle$**4**-ը կից անկյուններ են, ուրեմն $\angle$**3 + **$\angle$**4 = 180°**: Այս երկու հավասարություններից ստանում ենք, որ $\angle$**4** ≅ $\angle$**5**: Բայց $\angle$**4**-ը և $\angle$**5**-ը խաչադիր անկյուններ են, ուստի թեորեմ **1**-ի հիման վրա **a** և **b** ուղիղները զուգահեռ են: Թեորեմն ապացուցված է:

Այսպիսով, ասպարեզ է մտնում նոր երկրաչափական պատկեր՝ զուգահեռ ուղիղների զույգ: Ապացուցված երեք թեորեմները նկարագրում են այդ երկրաչափական պատկերի բնութագրիչ հատկությունները: Իրոք, հասկանալի է, որ զուգահեռ ուղիղները հատողով հատելիս առաջանում են համընկնելի խաչադիր անկյուններ, համընկնելի համապատասխան անկյուններ և միակողմանի անկյունների մեծությունների գումարը հավասար է **180°**-ի: Գործնականում ավելի օգտակար է հետևյալ հայտանիշը:

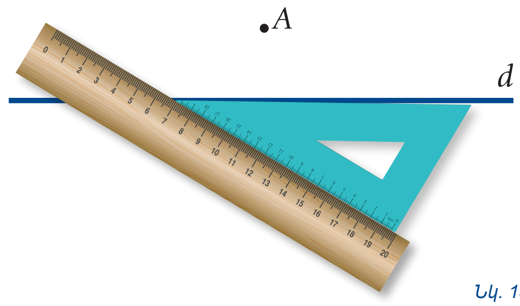
Թեորեմ 4: Երկու ուղիղները զուգահեռ են այն և միայն այն դեպքում, եթե դրանք ունեն ընդհանուր ուղղահայաց:

Զուգահեռ ուղիղների ընդհանուր ուղղահայացը այդ երկրաչափական պատկերի հիմնական երկրաչափական բնութագրիչն է (նկ. **153**), իսկ դրա երկարությունը՝ հանրահաշվական բնութագրիչը:



Նկ. 153

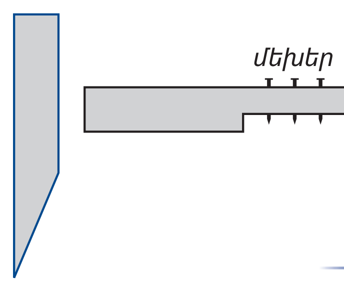
Նկ. 154



Նկ. 155

Դա նշանակում է, որ եթե տրված է զուգահեռ ուղիղների երկու զույգ, ապա այդ զույգերը համընկնելի են այն և միայն այն դեպքում, եթե դրանց ընդհանուր ուղղահայացներն ունեն նույն երկարությունը: Առաջին գործիքը, որի միջոցով կարծես թե հնարավոր է կառուցել զուգահեռ ուղիղներ, սովորական քանոնն է (նկ. **154**): Խնդիրն այն է, որ միայն քանոնով հնարավոր չէ հարթության տրված **A** կետում կառուցել տրված **d** ուղղին զուգահեռ ուղիղ, եթե չկան լրացուցիչ տվյալներ: Այլ բան է, եթե քանոնից բացի տրված է նաև գծագրական եռանկյուն (նկ. **155**): Այդ դեպքում գծագրական քանոնի մեծ կողմը (ներքնաձիգը) համընկեցնում են տրված **d** ուղղին, իսկ էջերից մեկը՝ քանոնին: Այնուհետև սահեցնում են գծագրական քանոնը սովորական քանոնի երկայնքով մինչև ներքնաձիգի **A** կետին հասնելը:

Նկ. 156



Նկ. 157

Այդ դիրքում շարժական գծագրական քանոնի ներքնաձիգով անցնող ուղղի մասը պարունակում է **A** կետը և զուգահեռ է **d** ուղղին: Գծագրական եռանկյունը կարելի է փոխարինել շինարարական անկյունարդով (նկ. **156**): Ատաղձագործական աշխատանքներում զուգահեռ ուղիղներ գծելու համար հաճախ օգտագործում են ռայսշինաներ և ռայսմասներ (նկ. **157**) (գերմաներեն reißen – գծագրել): Ինֆորմատիկայում օգտագործում են նաև էլեկտրոնային ռայսշինաներ: Համակարգչի լուսատախտակի վրա զուգահեռ ուղիղներ կառուցելիս օգտագործում են մի շարք պարզ ծրագրեր՝ **Paint**, **Power Point**, **Photoshop** և այլն: Շինարարական աշխատանքներում կիրառում են նաև լազերային սարքեր:

Գործնական առաջադրանքներ

378. Գծել ուղիղ, դրանից դուրս ընտրել որևէ կետ և գծագրական անկյունարդի միջոցով տանել ուղղահայաց ուղղին, այնուհետև նույն կետով տանել ուղղահայաց կառուցված ուղղին: Նշել գծագրի վրա առաջացած զուգահեռ ուղիղների զույգը:

379. Գծել երկու հատվող ուղիղներ և դրանցից մեկի վրա ընտրել հատման կետից տարբեր որևէ կետ: Անկյունաչափի միջոցով չափել ուղիղների կազմած անկյունը և ընտրված կետով տանել ուղիղ, որն այդ կետը պարունակող ուղղի հետ կազմում է այդ անկյանը համընկնելի անկյուն: Նշել ստացված զուգահեռ ուղիղների զույգը:

380. Գծել կամայական եռանկյուն և միացնել դրա երկու կողմերի միջնակետերը: Համեմատել ստացված հատվածը եռանկյան երրորդ կողմի հետ: Կատարել այդ կառուցումները համակարգչի **Paint** ծրագրի միջոցով:

381. Գծել կամայական եռանկյուն և **d** ուղիղ, որը զուգահեռ չէ եռանկյան որևէ կողմին: Եռանկյան գագաթներով տանել ուղիղներ, որոնք զուգահեռ են **d** ուղղին: Զուգահե՞ռ են իրար ստացված ուղիղները:

382. Նշել հայկական այբուբենի այն տառերը, որոնք պարունակում են զուգահեռ ուղիղների վրա դասավորված տարրեր (հատվածներ): Նշել նման տառեր լատինական այբուբենում:

383. Գծել երկու զուգահեռ ուղիղներ և հատել դրանք երրորդ ուղղով: Նշել առաջացած անկյունները և տալ դրանց անվանումները:

384. Նշել զուգահեռ հատվածների բնօրինակներ շրջակա միջավայրում:

385. Հատվածների փոխադարձ դասավորության ո՞ր դեպքն է ավելի հաճախ հանդիպում. ա) հատվող, բ) զուգահեռ: Պատասխանները հիմնավորել և քննարկել համադասարանցիների հետ:

386. Ինչպե՞ս սահմանել հատվածի և ճառագայթի զուգահեռությունը:

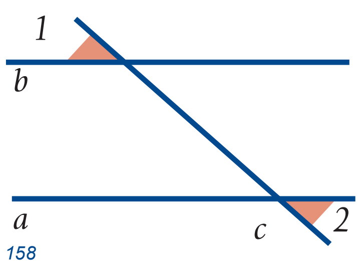
387. Հնարավո՞ր է արդյոք սահմանել. ա) երկու եռանկյունների, բ) եռանկյան և հատվածի, գ) եռանկյան և ճառագայթի զուգահեռություն: Պատասխանները հիմնավորել և քննարկել համադասարանցիների հետ:

388. Հնարավո՞ր է արդյոք, որ (**d, A**) հարթության մեջ **A** կետով անցնեն երկու ուղիղներ, որոնք չեն հատում **d** ուղիղը: Պատասխանները փորձել հիմնավորել և քննարկել համադասարանցիների հետ:

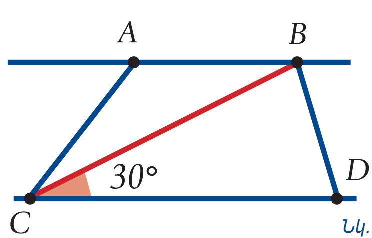
389. Ապացուցել, որ եթե ուղիղն ուղղահայաց է զուգահեռ ուղիղներից մեկին, ապա այն ուղղահայաց է նաև մյուսին:

390. Նկար **158**-ում **a**, **b** ուղիղները հատված են **c** ուղղով, ընդ որում՝ $\angle 1 \cong \angle 2$: Ապացուցել, որ **a** և **b** ուղիղները զուգահեռ են:

391. Նկար **159**-ում **AB || CD** և **AC ≅ AB, ∠BCD = 30°**: Որոշել **CAB** անկյան աստիճանային չափը:



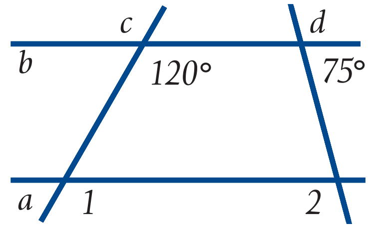
Նկ. 158



Նկ. 159

392. Երկու զուգահեռ ուղիղներ երրորդով հատելիս առաջացած ներքին միակողմանի անկյուններից մեկը երկու անգամ մեծ է մյուսից: Հաշվել այդ անկյունների մեծությունները:

393. Նկար **160**-ում պատկերված են **a** և **b** զուգահեռ ուղիղներ և **c** ու **d** հատողներ: Օգտվելով նշված տվյալներից՝ որոշել ∠**1**-ի, ∠**2**-ի աստիճանային չափերը:



Նկ. 160

394. Ճշմարիտ է արդյոք, որ զուգահեռ ուղիղների ցանկացած երկու ընդհանուր ուղղահայաց հավասար են:

395. **AB** և **CD** հատվածները հատվում են իրենց ընդհանուր միջնակետում: Ապացուցել, որ **AC** և **BD** ուղիղները զուգահեռ են:

396. **ABC** եռանկյան **BCD** արտաքին անկյան աստիճանային չափը **80°** է, և ∠**A = 40°**: Նկարագրել **BCD** արտաքին անկյան կիսորդի և եռանկյան **AB** կողմի փոխադարձ դասավորությունը:

397. Ապացուցել, որ կանոնավոր եռանկյան կողմերի միջնակետերը կանոնավոր եռանկյան գագաթներ են:

398. Ապացուցել, որ եռանկյան միջնագծերի երկարությունների գումարը մեծ է դրա կիսապարագծից:

399. Ապացուցել, որ կից անկյունների կիսորդներն ուղղահայաց են:

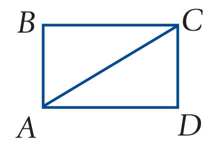
400. Ճշմարիտ է արդյոք, որ երկու զուգահեռ ուղիղներից յուրաքանչյուրի ցանկացած կետի հեռավորությունը մյուս ուղղից հաստատուն է:

401. **a** և **b** զուգահեռ ուղիղները **c** ուղղով հատելիս մի զույգ միակողմանի անկյունների կիսորդները հատվում են **O** կետում: Ապացուցել, որ **O** կետը հավասարապես է հեռացված **a, b, c** ուղիղներից:

402. **KLM** եռանկյան **KL** կողմի վրա ընտրված է **N** կետ: Որոշել **NM** հատվածի երկարությունը, եթե հայտնի է, որ **KLM, KMN, LMN** եռանկյունների պարագծերը համապատասխանաբար հավասար են **50** սմ, **45** սմ, **35** սմ:

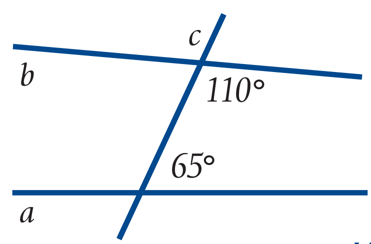
403. **ABC** եռանկյան **A** և **C** գագաթները հավասարապես են հեռացված **B** գագաթով անցնող **d** ուղղից: Ինչպե՞ս կարող է դասավորված լինել այդ ուղիղը **ABC** եռանկյան նկատմամբ: Պատասխանը հիմնավորել և քննարկել համադասարանցիների հետ:

404. Համեմատել հետևյալ երկու առաջադրությունները:

Ճշմարի՞տ է արդյոք, որ զուգահեռ ուղիղների զույգն ունի երկու ընդհանուր ուղղահայաց:	Հնարավո՞ր է ապացուցել, որ եռանկյան ներքին անկյունների մեծությունների գումարը 180° է: 

Պատասխանը հիմնավորել և քննարկել համադասարանցիների հետ: Ի՞նչ արգելքներ կան հանգելու դրական պատասխանի:

405. **a** և **b** ուղիղները **c** ուղղով հատելիս մի զույգ միակողմանի անկյունների աստիճանային չափերի գումարը փոքր է **180°**-ից (նկ. **161**): Հնարավո՞ր է արդյոք հիմնավորել, որ **a** և **b** ուղիղները հատվում են **c** ուղղի այն կողմում, որում այդ գումարը փոքր է **180°**-ից: Պատասխանը հիմնավորել և քննարկել համադասարանցիների հետ: Ի՞նչ արգելքներ կան հանգելու դրական պատասխանի:



Նկ. 161

§2. ԶՈՒԳԱՀԵՌ ՈՒՂԻՂՆԵՐԻ ԱՔՍԻՈՄԸ

Երկրաչափական պատկերների հատկություններն ուսումնասիրելիս մենք ապացուցում ենք մի շարք թեորեմներ, որի ընթացքում որպես կանոն, հենվում ենք ավելի վաղ ապացուցված թեորեմներին: Իսկ ինչի՞ վրա են հիմնված երկրաչափության ամենաառաջին թեորեմների ապացուցումները: Երկրաչափական պատկերների հատկությունների մասին որոշ պնդումներ ընդունվում են որպես սկզբնական դրույթներ, հիմնադրույթներ, նախադրույթներ, որոնց հիման վրա այնուհետև սկսում են ապացուցել թեորեմներ և քայլ առ քայլ կառուցում ամբողջ երկրաչափությունը: Այդպիսի նախադրույթները կոչվում են **աքսիոմներ**:

Որոշ աքսիոմներ ձևակերպվել են դեռ առաջին գլխում: Օրինակ՝ աքսիոմ է այն պնդումը, որ ցանկացած երկու կետով անցնում է ուղիղ և այն էլ միայն մեկը: Շատ աքսիոմներ օգտագործվել են մեր դատողություններում: Այսպես, երկու հատվածների համեմատումը մենք կատարել ենք մի հատվածը մյուսի վրա տեղադրելու միջոցով: Այդպիսի տեղադրման հնարավորությունը հետևում է հետևյալ աքսիոմից. ցանկացած ճառագայթի վրա դրա գագաթից հնարավոր է տեղադրել տրված հատվածին համընկնելի հատված և այն էլ միայն մեկը: Երկու անկյունների համեմատումը հիմնված է համանման աքսիոմի վրա. ցանկացած ճառագայթից դրա տրված կողմում հնարավոր է տեղադրել տրված անկյանը համընկնելի անկյուն և այն էլ միայն մեկը: Բոլոր այդ աքսիոմները տեսանելիորեն ակնհայտ են և կասկած չեն հարուցում: *«Աքսիոմ»* բառն ինքը առաջացել է հունարեն *«Աքսիոս»* բառից, որ նշանակում է *«արժեքավոր, վստահության արժանի»*:

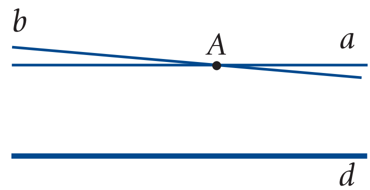
Երկրաչափության կառուցման այդպիսի մոտեցումը ծնունդ է առել դեռ հնում և շարադրվել Հին Հունաստանի գիտնականների աշխատանքներում: Երկրաչափության առաջին այդպիսի համակարգված դասընթացը, որը հիմնված էր սահմանումների և աքսիոմների վրա, վերագրում են **Հիպոկրատին Քիոսից** (**4**-րդ դար մ.թ.ա) և **Եվդոքսին**: Այդպիսի դասընթացներն անվանում էին **«Տարրեր»**, քանի որ այդ դասընթացներում երկրաչափության ողջ կառույցը սահմանումների և

Էվկլիդես

(365-300 թթ. մ.թ.ա)

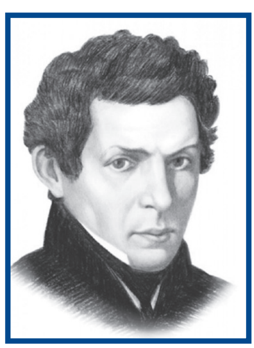
աքսիոմների միջոցով էր կառուցվում, ինչպես, հին հույների պատկերացմամբ, շինությունը կառուցվում է չորս **«տարրերից»**՝ կրակից, օդից, ջրից, հողից: Այդ և նման այլ դասընթացների հետագա կատարելագործումը և զարգացումը բերեց Ալեքսանդրիայում բնակվող Էվկլիդեսի (մոտավորապես **365-300** թթ. մ.թ.ա.) այդ նույն անվանմամբ աշխատությանը: Էվկլիդեսի աքսիոմներից մի քանիսը այսօր էլ օգտագործվում է երկրաչափության դասընթացներում, իսկ **«Տարրերում»** շարադրված երկրաչափությունը կոչվում է **տարրական էվկլիդեսյան երկրաչափություն**:

Ընտրենք որևէ **d** ուղիղ և **A** կետ, որը չի պատկանում այդ ուղղին (նկ. **162**): Մենք արդեն ցուցադրել ենք, թե ինչպես կառուցել **a** ուղիղ, որն անցնում է **A** կետով և զուգահեռ է **d** ուղղին: Հնարավո՞ր է արդյոք **A** կետով տանել մեկ այլ ուղիղ, որը նույնպես զուգահեռ է **d** ուղղին: Թվում է, թե եթե **a** ուղիղը «պտտենք» **A** կետի շուրջ նույնիսկ շատ փոքր անկյունով, ապա այն (**b** ուղիղը նկ. **162**-ում) կհատի **d** ուղիղը: Այլ կերպ ասած՝ թվում է, թե **A** կետով հնարավոր չէ տանել **d** ուղղին զուգահեռ մեկ այլ (**a**-ից տարբեր) ուղիղ: Շուրջ երկու հազար տարի մաթեմատիկոսները փորձել են ապացուցել այդ պնդումը որպես թեորեմ՝ *բխեցնելով այն Էվկլիդեսի մնացած աքսիոմներից*:

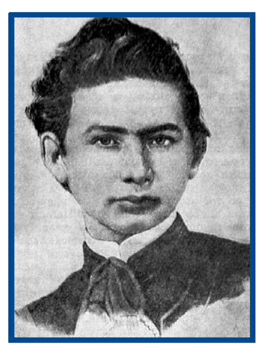


Նկ. 162

Կ. Ի. Ֆ. Գաուս



Ն. Ի. Լոբաչևսկի



Յա. Բոլյայ

Այդ որոնումներին հիմք էր տվել Էվկլիդեսը, որն իր աշխատության մեջ, որպես նախադրույթ, ձևակերպել էր մի պնդում՝ հինգերորդ նախադրույթը, որից հետևում էր **A** կետով անցնող և **d** ուղղին զուգահեռ ուղղի միակությունը (տե՛ս խնդիր **405**-ը): **19**-րդ դարում պարզվեց, որ այդ պնդումը չի հետևում Էվկլիդեսի մնացած աքսիոմներից, որովհետև աքսիոմ է:

Այս խնդրի լուծումը վերագրվում է ռուս մեծ մաթեմատիկոս **Նիկոլայ Իվանովիչ Լոբաչևսկուն** (**1792-1856**):

1826 թ. Ն. Ի. Լոբաչևսկին Կազանի համալսարանի գիտական խորհրդին ներկայացրեց իր **«Դատողություններ երկրաչափության սկզբունքների մասին»** զեկուցումը, իսկ 1829 թ. լույս ընծայեց **«Երկրաչափության հիմնադրույթների մասին»** գիտական աշխատությունը, որն առաջին հրապարակված աշխատանքն էր ոչ էվկլիդեսյան երկրաչափությունից: Հունգարացի **Յանոշ Բոլյայն** իր հետազոտությունների արդյունքները հրապարակեց միայն **1832** թ.: Այդ պատճառով Ն. Ի. Լոբաչևսկին համարվում է, այսպես կոչված, հիպերբոլական երկրաչափության հիմնադիրը, իսկ այդ երկրաչափությունն անվանում են Լոբաչևսկու երկրաչափություն (հանուն արդարության հարկ է նշել, որ Հունգարիայում այն անվանում են Բոլյայի, իսկ Գերմանիայում՝ Գաուսի երկրաչափություն): Հետաքրքիր է, որ դրանից մեկ դար առաջ իտալացի ճիզվիտ Ջովաննի Ջիրոլամո Սակկերին իր հետազոտությունների վերջում եկել էր այն եզրակացության, որ *«Էվկլիդեսը ճիշտ է վարվել, որ հինգերորդ նախադրույթը տեղադրել է իր աքսիոմների շարքում»*: Սակկերին ներմուծել է հատուկ տեսքի քառանկյուն, որն այսօր կրում է իր անունը: Սակայն հետագայում պարզվել է, որ այդ քառանկյունը առաջինը ներմուծել է մեծ պարսիկ գիտնական **Օմար Խայամը** (**1048-1131**):

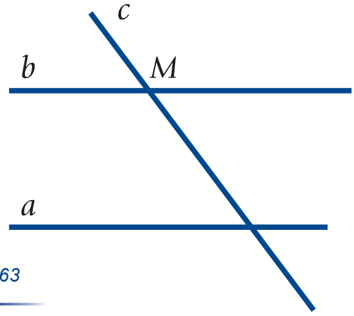
Վերադառնանք Էվկլիդեսյան երկրաչափություն: Այստեղ որպես հիմնադրույթ ընդունում ենք Էվկլիդեսի զուգահեռ ուղիղների հետևյալ աքսիոմը.

27. Տրված ուղղից դուրս դասավորված կետով այդ ուղղով և այդ կետով որոշվող հարթության մեջ անցնում է այդ ուղիղը չհատող ոչ ավելի, քան մեկ ուղիղ:

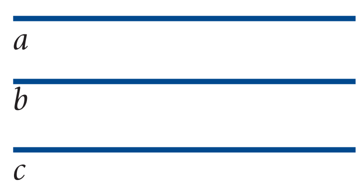
Ինչպես հայտնի է, այն պնդումները, որոնք անմիջականորեն տրամաբանորեն հետևում են աքսիոմներից կամ թեորեմներից, կոչվում են հետևանքներ: Դիտարկենք Էվկլիդեսի զուգահեռ ուղիղների աքսիոմի մի քանի պարզագույն հետևանք:

Հետևանք 1. Էվկլիդեսյան հարթության մեջ եթե ուղիղը հատում է երկու զուգահեռ ուղիղներից մեկը, ապա այն հատում է նաև մյուսը:

Իրոք, եթե **c** հատողը հատում է **a** և **b** զուգահեռ ուղիղներից մեկը, ասենք՝ **b** ուղիղը **M** կետում (նկ. **163**), ապա, ենթադրելով, որ **c** ուղիղը չի հատում **a** ուղիղը, այսինքն՝ զուգահեռ է դրան, կստանանք, որ **M** կետով անցնում են երկու ուղիղներ՝ **b**-ն և **c**-ն, որոնք զուգահեռ են **a** ուղղին: Դա հակասում է զուգահեռ ուղիղների աքսիոմին, ուրեմն ենթադրությունը կեղծ էր և, հետևաբար, **c** ուղիղը հատում է **a** ուղիղը:



Նկ. 163



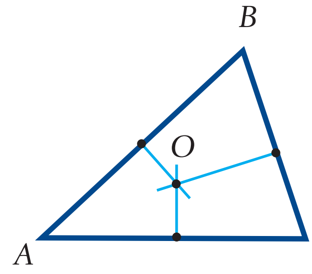
Նկ. 164

Հետևանք 2. Եթե Էվկլիդեսյան հարթության երկու ուղիղներ առանձին-առանձին զուգահեռ են երրորդ ուղղին, ապա այդ ուղիղները զուգահեռ են:

Դիցուք **a** և **b** ուղիղներից յուրաքանչյուրը զուգահեռ է **c** ուղղին (նկ. **164**): Ենթադրենք, որ **a** և **b** ուղիղները զուգահեռ չեն, այսինքն՝ հատվում են ինչ-որ **M** կետում: Ստացանք, որ **M** կետով անցնում են երկու ուղիղներ՝ **a** և **b** ուղիղները, որոնք զուգահեռ են **c** ուղղին, որը հակասում է զուգահեռ ուղիղների աքսիոմին: Ուրեմն ենթադրությունը կեղծ էր և իրականում **a** և **b** ուղիղները զուգահեռ են:

Հետևանք 3. Էվկլիդեսյան հարթության մեջ ցանկացած եռանկյան կողմերի միջնուղղահայացները հատվում են միևնույն կետում:

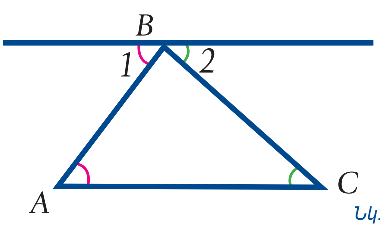
Ապացուցում: Նախ ստուգենք, որ կամայական **ABC** եռանկյան **AB** և **BC** կողմերի միջնուղղահայացները հատվում են ինչ-որ **O** կետում (նկ. **165**): Ենթադրենք, որ այդ ուղղահայացները չեն հատվում, այսինքն՝ զուգահեռ են: Սակայն այդ դեպքում զուգահեռ են նաև եռանկյան **AB** և **BC** կողմերը, որը հնարավոր չէ: Այսպիսով, **ABC** եռանկյան **AB** և **BC** կողմերի միջնուղղահայացները հատվում են ինչ-որ **O** կետում: Ստուգենք, որ այդ եռանկյան **AC** կողմի միջնուղղահայացը նույնպես անցնում է **O** կետով: Քանի որ **O** կետը հավասարահեռ է **AB** և **BC** հատվածների ծայրակետերից, ուստի **O** կետի հեռավորությունը **A** կետից հավասար է դրա հեռավորությանը **C** կետից: Դա նշանակում է, որ **O** կետը պատկանում է **AC** հատվածի միջնուղղահայացին: Ուրեմն կամայական **ABC** եռանկյան կողմերի միջնուղղահայացները հատվում են միևնույն կետում: Պնդումն ապացուցված է:



Նկ. 165

Հետևանք 4. Եթե տեղի ունի Էվկլիդեսի զուգահեռության աքսիոմը, ապա ցանկացած եռանկյան ներքին անկյունների մեծությունների գումարը **180°** է:

Ապացուցում: Ստուգենք, որ ցանկացած **ABC** եռանկյան դեպքում տեղի ունի **∠A + ∠B + ∠C = 180°** առնչությունը: Դրա համար այդ եռանկյան գագաթներից որևէ մեկով, ասենք՝ **B**-ով տանենք **d** ուղիղ, որը զուգահեռ է **AC** կողմին, և հաշվի առնենք, որ **d** և **AC** զուգահեռ ուղիղները **AB** ուղղով հատելիս **A** և **1**, **C** և **2** խաչադիր անկյուններն ունեն նույն աստիճանային չափերը (նկ. **166**): Ուրեմն **∠A + ∠B + ∠C = ∠1 + ∠B + ∠2**: Վերջինս հավասար է **180°**-ի: Պնդումն ապացուցված է, քանի որ **ΔABC**-ն կամայական է:



Նկ. 166

Պարզվել է, որ եթե Էվկլիդեսի զուգահեռության աքսիոմի փոխարեն ներմուծենք *«Տրված ուղղից դուրս դասավորված կետով այդ ուղղով և* *այդ կետով որոշվող հարթության մեջ անցնում է ավելի քան մեկ ուղիղ, որը չի հատում այդ ուղիղը»* աքսիոմը, ապա որևէ հակասություն չի առաջանա: Դրա փոխարեն կառաջանա նոր երկրաչափություն: Այդ պատճառով Էվկլիդեսյան երկրաչափական թեորեմների զգալի մասը ձևակերպելիս անհրաժեշտ է ավելացնել *«եթե տեղի ունի Էվկլիդեսի զուգահեռության աքսիոմը»*: Այսուհետև մենք կենթադրենք, որ տեղի ունի այդ աքսիոմը և այդ բառակապակցությունը չենք նշի:

Գործնական առաջադրանքներ

406. Հայկական այբուբենում նշել այն տառերը, որոնք պարունակում են երեք զույգ առ զույգ զուգահեռ ուղիղների վրա դասավորված տարրեր՝ հատվածներ: Նշել նաև այն հատվածները, որոնք դասավորված են հատվող ուղիղների վրա:

407. Նշել զուգահեռ ուղիղները հատողով հատելու օրինակներ շրջապատից:

408. Գծել երկու կամայական **a** և **b** ուղիղներ և դրանց հատողը: Անկյունաչափի միջոցով չափել առաջացած անկյունները և պարզել, թե հատողի որ կողմում են հատվում **a** և **b** ուղիղները:

409. Գծել որևէ **ABC** եռանկյուն: Այդ եռանկյան **B** գագաթում գծել ուղիղ, որը. ա) չի հատում **AC** ուղիղը, բ) չի հատում **AC** հատվածը: Քանի՞ այդպիսի ուղիղ է հնարավոր գծել:

Հարցեր և խնդիրներ

410. Ինչպե՞ս ձևակերպել Էվկլիդեսի զուգահեռության աքսիոմը՝ օգտագործելով «զուգահեռ» տերմինը: Պատասխանը հիմնավորել և քննարկել համադասարանցիների հետ:

411. Ինչպե՞ս կառուցել այն միակ ուղիղը, որը հիշատակվում է Էվկլիդեսի զուգահեռության աքսիոմում:

412. Ճշմարի՞տ է արդյոք, որ եթե տեղի ունի Էվկլիդեսի զուգահեռության աքսիոմը, ապա զուգահեռ ուղիղներն ունեն առնվազն երկու ընդհանուր ուղղահայաց: Պատասխանը հիմնավորել և քննարկել համադասարանցիների հետ:

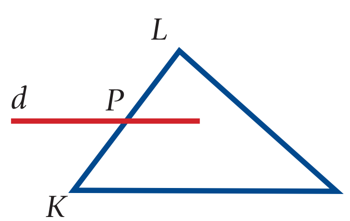
413. Ապացուցել, որ եթե տեղի ունի Էվկլիդեսի զուգահեռության աքսիոմը, ապա ցանկացած ուղղանկյուն եռանկյան սուր անկյունների մեծությունների գումարը **90°** է:

414. Ճշմարի՞տ է արդյոք, որ եթե տեղի ունի Էվկլիդեսի զուգահեռության աքսիոմը, ապա զուգահեռ ուղիղներից մեկի կետերի հեռավորությունը մյուս ուղղից հաստատուն մեծություն է:

415. Ապացուցել, որ եթե տեղի ունի Էվկլիդեսի զուգահեռության աքսիոմը, ապա ցանկացած եռանկյան արտաքին անկյան մեծությունը հավասար է իրեն ոչ կից երկու անկյունների մեծությունների գումարին:

416. **A** և **B** կետերը դասավորված են **d** ուղղի տարբեր կողմերում: Ապացուցել, որ **AB**-ին զուգահեռ ցանկացած ուղիղ հատում է **d** ուղիղը:

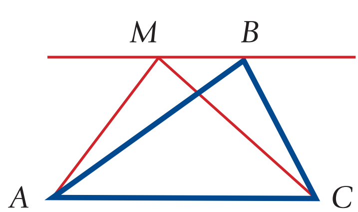
417. **d** ուղիղը, որը զուգահեռ է **KLM** եռանկյան **KM** կողմին, հատում է դրա **KL** կողմը **P** միջնակետում (նկ. **167**): Ապացուցել, որ այդ ուղիղը հատում է **LM** հատվածը դրա միջնակետում:



Նկ. 167

418. Նկարագրել ընդհանուր հիմքով և համընկնելի բարձրություններով բոլոր եռանկյունների երրորդ գագաթների բազմությունը:

419. **ABC** եռանկյան **B** գագաթով տարված է երկու ուղիղ: Դրանցից քանի՞սը կարող են չհատել AC ուղիղը:



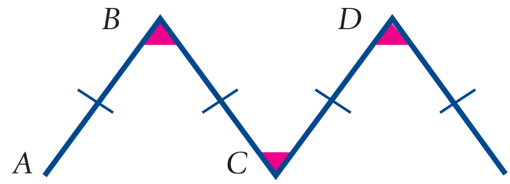
Նկ. 168

420. **AC** ընդհանուր հիմքով **ABC** և **AMC** եռանկյունների **B** և **M** գագաթները որոշում են **AC** կողմին զուգահեռ ուղիղ՝ **MB** || **AC** (նկ. **168**): Ինչպե՞ս պետք է դասավորված լինի **M** կետը, որպեսզի տեղի ունենա **ΔABC** ≅ **ΔAMC** պայմանը:

421. Նկարագրել հարթության բոլոր այն կետերի բազմությունը, որոնք հավասարապես են հեռացված տրված զուգահեռ ուղիղներից:

422. **AB** հատվածի ծայրակետերը պատկանում են **d** և **m** զուգահեռ ուղիղներին: Այդ հատվածի **O** միջնակետով անցնող ուղիղը հատում է **d** և **m** ուղիղները համապատասխանաբար **C** և **D** կետերում: Ապացուցել, որ **OC** ≅ **OD**:

423. Նկար **169**-ում **AB** ≅ **BC** ≅ **CD** ≅ **DE**, **∠ABC** ≅ **∠BCD** ≅ **∠CDE**: Ապացուցել, որ **A**, **C** և **E** կետերը պատկանում են միևնույն ուղղի:



Նկ. 169

424. Երկու զուգահեռ ուղիղներ հատողով հատելիս խաչադիր անկյունների աստիճանային չափերի գումարը հավասար է **210°**-ի: Հաշվել այդ անկյունների մեծությունները:

425*. Ապացուցել, որ եթե սուր անկյան մի կողմի կետերով այդ կողմին տարված բոլոր ուղղահայացները հատում են անկյան երկրորդ կողմը, ապա տեղի ունի Էվկլիդեսի զուգահեռության աքսիոմը:

426. Երկու զուգահեռ ուղիղներ հատված են հատողով: Ապացուցել, որ. **ա)** խաչադիր անկյունների կիսորդները զուգահեռ են, **բ)** միակողմանի անկյունների կիսորդներն ուղղահայաց են:

427. Բացատրել թե ինչո՞ւ է եռանկյան կողմերի երկարությունների գումարի համար ներմուծվում հատուկ անվանում (պարագիծ), իսկ ներքին անկյունների աստիճանային չափերի գումարի համար՝ ոչ: Պատասխանը քննարկել համադասարանցիների հետ:

428. Համեմատել հետևյալ պնդումները:

Ապացուցել, որ կանոնավոր եռանկյան միջնագծերը հատվում են միևնույն կետում:	Ապացուցել, որ կանոնավոր եռանկյան բարձրությունները հատվում են միևնույն կետում:

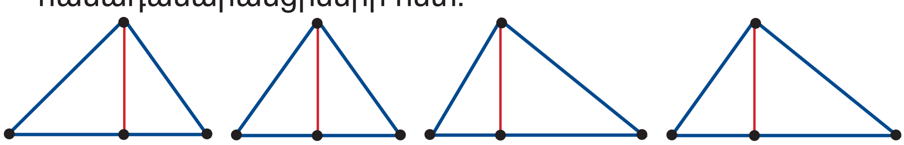
Պատասխանները քննարկել համադասարանցիների հետ: Ճշմարի՞տ են արդյոք այդ պնդումները կիսականոնավոր եռանկյունների դեպքում:

429. Համեմատել հետևյալ պնդումները:

Ուղղանկյուն եռանկյան սուր անկյուններից մեկի մեծությունը **17°** է: Ինչի՞ է հավասար երկրորդ սուր անկյան մեծությունը:	Ուղղանկյուն եռանկյան սուր անկյուններից մեկի մեծությունը **20°**-ով մեծ է մյուս սուր անկյան մեծությունից: Որոշել այդ անկյունների մեծությունները:

Պատասխանները քննարկել համադասարանցիների հետ: Ո՞ր պատասխանն է լավագույնը:

430. Բացահայտել և ձևակերպել տրված եռանկյունների կառուցվածքի օրինաչափությունը: Պատասխանը քննարկել համադասարանցիների հետ:



431. Ապացուցել, որ կանոնավոր եռանկյան ներքին անկյունների մեծությունները զույգ առ զույգ հավասար են: Ինչի՞ է հավասար այդ մեծությունը:

432. **ABC** եռանկյան մեջ **A** անկյան մեծությունը **25°** է, իսկ **B** գագաթում արտաքին անկյան մեծությունը՝ **70°**: Հաշվել **C** անկյան մեծությունը:

433. Համեմատել հետևյալ պնդումները:
Քանի՞ լուծում ունեն այս խնդիրները: Պատասխանները

Կիսականոնավոր եռանկյան ներքին անկյուններից մեկի մեծությունը **80°** է: Որոշել մնացած երկու անկյունների մեծությունները:	**ABC** կիսականոնավոր եռանկյան մեջ (**AC ≅ BC**) **∠C = 70°**: Հաշվել այդ եռանկյան արտաքին անկյունների մեծությունները:

քննարկել համադասարանցիների հետ:

434. Հաշվել. **ա)** կանոնավոր, **բ)** կիսականոնավոր, **գ)** կամայական եռանկյան բոլոր արտաքին անկյունների մեծությունների գումարը: Պատասխանները քննարկել համադասարանցիների հետ: Ձևակերպել ընդհանուր արդյունքը:

435. **PQR** ուղղանկյուն եռանկյան ուղիղ անկյան գագաթից (**∠Q = 90°**) տարված են **QD** միջնագիծը և **QH** բարձրությունը: Այդ միջնագծի և բարձրության կազմած անկյան մեծությունն արտահայտել **R** անկյան մեծությունով: Քննարկել **∠R > 45°**, **∠R = 45°** և **∠R < 45°** դեպքերը:

436. Եռանկյան երկու ներքին և երրորդ գագաթում արտաքին անկյունների մեծությունների գումարը **91°** է: Ի՞նչ տեսակի է այդ եռանկյունը:

437. Ապացուցել, որ ուղղանկյուն եռանկյան ներքնաձիգը երկու անգամ մեծ է ուղիղ անկյան գագաթից տարված միջնագծից:

438. **KN** հատվածը **KLM** եռանկյան կիսորդն է: Հաշվել **KNM** անկյան մեծությունը, եթե **∠L = 45°**, **∠MKN = 30°**:

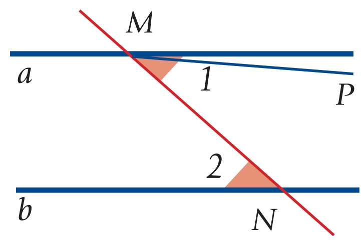
439. Ապացուցել, որ. **ա)** եթե **a || b**, ապա **b || a**, **բ)** եթե **a || b** և **b || c**, ապա **a || c**:

§3. ԶՈՒԳԱՀԵՌ ՈՒՂԻՂՆԵՐԻ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ

Դիտարկենք մի քանի թեորեմ երկու զուգահեռ ուղիղներով և հատողով կազմված անկյունների մասին:

Թեորեմ 1: Եթե երկու զուգահեռ ուղիղներ հատված են հատողով, ապա առաջացած խաչադիր անկյունները համընկնելի են:

Ապացուցում: Դիցուք **a** և **b** զուգահեռ ուղիղները հատված են **MN** հատողով (նկ.**170**): Ապացուցենք, օրինակ, որ ∠1 և ∠2 խաչադիր անկյունները համընկնելի են:

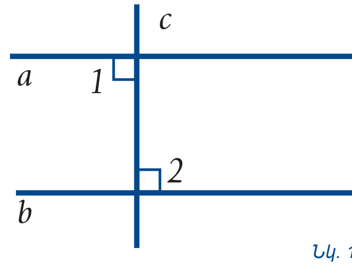


Նկ. 170

Ենթադրենք, որ այդպես չէ: Դիցուք **∠1 > ∠2**: **MN** ճառագայթից տեղադրենք **∠2**-ին համընկնելի **PMN** անկյունն այնպես, որ **MP** և **b** ուղիղները **MN** հատողով հատելիս **∠PMN**-ը և **∠2**-ը լինեն խաչադիր անկյուններ: Ըստ կառուցման՝ այդ խաչադիր անկյունները համընկնելի են, ուստի **MP || b**: Ստացանք, որ **M** կետով անցնում է b ուղղին զուգահեռ երկու ուղիղ, այն է՝ **a** և **MP** ուղիղները: Դա հակասում է զուգահեռ ուղիղների աքսիոմին: Նույն արդյունքի կհանգենք, եթե ենթադրենք, որ **∠1 < ∠2**: Ուրեմն ենթադրությունը կեղծ էր և իրականում **∠1** ≅ **∠2**: *Թեորեմն ապացուցված է:*

Հետևանք: Եթե ուղիղն ուղղահայաց է զուգահեռ ուղիղներից մեկին, ապա այն ուղղահայաց է նաև մյուսին:

Ապացուցում: Դիցուք **a || b** և **c⊥a**, այսինքն՝ **∠1 = 90°** (նկ. **171**): **c** ուղիղը հատում է **a** ուղիղը, ուրեմն այն հատում է նաև **a**-ին զուգահեռ **b** ուղիղը: **a** և **b** զուգահեռ ուղիղները **c** հատողով հատելիս առաջանում են համընկնելի խաչադիր

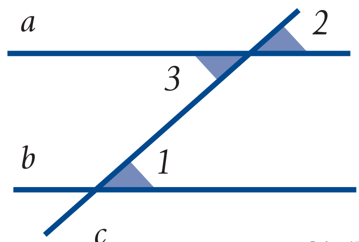


Նկ. 171

անկյուններ. $\angle 1 \cong \angle 2$: Քանի որ $\angle 1 = 90°$, ուստի նաև $\angle 2 = 90°$, այսինքն՝ $c \perp b$:

Թեորեմ 2: Եթե երկու զուգահեռ ուղիղներ հատված են հատողով, ապա համապատասխան անկյունները համընկնելի են:

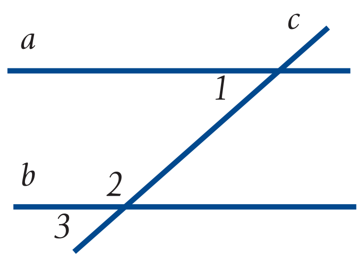
Ապացուցում: Դիցուք **a** և **b** զուգահեռ ուղիղները հատված են c հատողով (նկ. **172**): Ապացուցենք, օրինակ, որ $\angle 1$ և $\angle 2$ համապատասխան անկյունները համընկնելի են: Քանի որ **a** || **b**, ուստի $\angle 1$ և $\angle 3$ խաչադիր անկյունները համընկնելի են: $\angle 2$ և $\angle 3$ անկյունները համընկնելի են որպես ուղղաձիգ անկյուններ: $\angle 1 \cong \angle 3$ և $\angle 2 \cong \angle 3$ հավասարություններից հետևում է, որ $\angle 1 \cong \angle 2$: *Թեորեմն ապացուցված է:*



Նկ. 172

Թեորեմ 3: Եթե երկու զուգահեռ ուղիղներ հատված են հատողով, ապա միակողմանի անկյունների մեծությունների գումարը 180° է

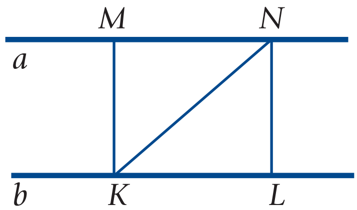
Ապացուցում: Դիցուք **a** և **b** զուգահեռ ուղիղները հատված են **c** հատողով (նկ. **173**): Ապացուցենք, օրինակ, որ $\angle 1 + \angle 2 = 180°$: **a** և **b** ուղիղների զուգահեռությունից հետևում է $\angle 1$ և $\angle 3$ համապատասխան անկյունների մեծությունների հավասարությունը: $\angle 2$-ը և $\angle 3$-ը կից անկյուններ են, ուստի $\angle 2 + \angle 3 = 180°$: Այստեղից հեշտ է ստանալ, որ $\angle 1 + \angle 2 = 180°$: *Թեորեմն ապացուցված է:*



Նկ. 173

Նշենք զուգահեռ ուղիղների ևս մեկ հետաքրքիր հատկություն:

Թեորեմ 4: Երկու զուգահեռ ուղիղներից մեկի ցանկացած կետի հեռավորությունը մյուս ուղղից հաստատուն մեծություն է:



Նկ. 174

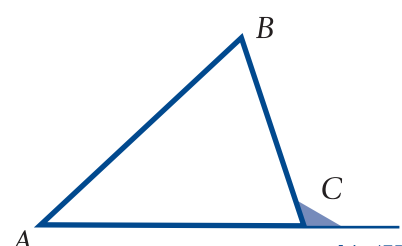
Ապացուցում: Դիցուք **a** և **b** ուղիղները զուգահեռ են: Ընտրենք այդ ուղիղներից մեկի, օրինակ՝ **a**-ի կամայական **M** և **N** կետեր և այդ կետերում կառուցենք ուղղահայացներ **b** ուղղին: Դրանց հիմքերը նշանակենք **K** և **L** տառերով (նկ. **174**) և ապացուցենք, որ **MK** ≅ **NL**: Դրա համար համեմատենք **MKN** և **LNK** եռանկյունները: Դրանք համընկնելի են ըստ **NK** ընդհանուր կողմի և այդ կողմին առընթեր համապատասխանաբար համընկնելի **MKN, MNK** և **LNK, LKN** անկյունների զույգերին: Հետևաբար, **MK** ≅ **NL**: *Թեորեմն ապացուցված է:*

Այս թեորեմը հիմք է տալիս խոսելու երկու զուգահեռ ուղիղների հեռավորության մասին. դա պարզապես ուղիղներից մեկի կամայական կետի հեռավորությունն է մյուս ուղղից:

Էվկլիդեսի զուգահեռ ուղիղների աքսիոմը հնարավորություն է տալիս ճշտել եռանկյան արտաքին անկյան մասին թեորեմը:

Թեորեմ 5: Էվկլիդեսյան հարթության մեջ եռանկյան արտաքին անկյան մեծությունը հավասար է իրեն ոչ կից երկու ներքին անկյունների մեծությունների գումարին:

Ապացուցում: Իրոք, մի կողմից, **ABC** եռանկյան արտաքին ∠**1**-ը կից է եռանկյան ներքին անկյուններից մեկին, ∠**C**-ին (նկ. **175**), այսինքն՝ այդ երկու անկյունների մեծությունների գումարը հավասար է **180°**-ի. ∠**C** + ∠**1** = **180°**: Մյուս կողմից, ըստ ապացուցված թեորեմ **5**-ի, եռանկյան բոլոր ներքին անկյունների մեծությունների գումարը նույնպես հավասար է **180°**-ի. ∠**A** + ∠**B** + ∠**C** = **180°**: Այս երկու հավասարություններից եզրակացնում ենք, որ ∠**1** = ∠**A** + ∠**B**: *Թեորեմն ապացուցված է:*



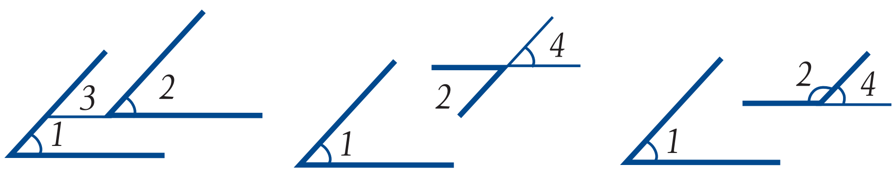
Նկ. 175

Ապացուցենք հետևյալ երկու պարզ պնդումները:

Թեորեմ 6: Եթե մի անկյան կողմերը համապատասխանաբար զուգահեռ են մյուս անկյան կողմերին, ապա այդպիսի անկյունները կա՛մ համընկնելի են, կա՛մ էլ դրանց մեծությունների գումարը հավասար է **180°**-ի:

Ապացուցում: Դիտարկենք հնարավոր երեք դեպք:

ա) Դիցուք ∠**1** և ∠**2** անկյունների համապատասխան կողմերը զուգահեռ են և բացի այդ, ունեն միևնույն ուղղությունը (նկ. **176**): ∠**2**-ի կողմերից մեկը հատելով ∠**1**-ի իրեն ոչ զուգահեռ կողմը, առաջացնում է ∠**3** անկյունը, որը համընկնելի է և ∠**1**-ին, և ∠**2**-ին: Ուրեմն ∠**1** ≅ ∠**2**:



Նկ. 176

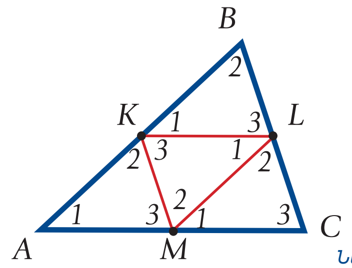
բ) Դիցուք ∠**1**-ի կողմերը համապատասխանաբար զուգահեռ են ∠**2**-ի կողմերին, բայց ունեն հակադիր ուղղություններ (նկ. **176**): ∠**4**-ը համընկնելի է ուղղաձիգ ∠**2**-ին, որը, ըստ ապացուցված **ա)** դեպքի, համընկնելի է ∠**1**-ին: Քանի որ ∠**2** ≅ ∠**4**, ուստի ∠**2** ≅ ∠**1**:

գ) Այժմ ենթադրենք, որ ∠**1**-ի կողմերը համապատասխանաբար զուգահեռ են ∠**2**-ի կամ ∠**5**-ի կողմերին, ընդ որում՝ համեմատվող անկյունների երկու կողմերն ունեն նույն, իսկ մնացած երկուսը՝ հակադիր ուղղություններ (նկ. **176**): ∠**2**-ին կից ∠**5**-ը համընկնելի է ∠**1**-ին: Բայց մյուս կողմից, ըստ կից անկյունների հատկության, ∠**5** + ∠**2** = **180°**: Հետևաբար, նաև ∠**5** + ∠**1** = **180°**: Թեորեմն ապացուցված է:

Համանման եղանակով կարելի է ապացուցել հետևյալ պնդումը:

Թեորեմ 7: Եթե մի անկյան կողմերը համապատասխանաբար ուղղահայաց են մյուս անկյան կողմերին, ապա այդպիսի անկյունները կա՛մ համընկնելի են, կա՛մ էլ միասին կազմում են **180°**-ի անկյուն:

Զուգահեռ ուղիղների հատկությունները հնարավորություն են տալիս ներմուծել եռանկյան նոր տարրեր: Եռանկյան երկու կողմերի միջնակետերով որոշվող հատվածը կոչվում է **եռանկյան միջին գիծ**: Ուրեմն ցանկացած եռանկյուն ունի երեք միջին գիծ: Դիցուք **ΔABC**-ն կամայական եռանկյուն է, իսկ **K**-ն **AB** կողմի միջնակետը: **K** կետով տանենք ուղիղներ, որոնք զուգահեռ են եռանկյան համապատասխանաբար **AC** և **BC** կողմերին և **L** և **M** տառերով նշանակենք դրանց **BC** և **AC** ուղիղների հատման կետերը (նկ. **177**): Դժվար չէ համոզվել, որ այդ ուղիղները հատում են եռանկյան **AC** և **BC** կողմերը դրանց ներքին կետերում: **ABC** եռանկյան մեջ առաջանում են չորս նոր եռանկյուններ՝ **ΔAKM, ΔKBL, ΔMLC, ΔLMK**: Նկար **177**-ում նշված են այդ եռանկյունների ներքին անկյունները: Դա ցույց է տալիս, որ այդ բոլոր եռանկյունները ունեն նույն ձևը (դրանցից յուրաքանչյուր երկուսի համապատասխան ներքին անկյունները համընկնելի են): Ստուգենք, որ այդ եռանկյունները զույգ առ զույգ համընկնելի են: Իրոք, ըստ պայմանի՝ **AK ≅ KB,** և ըստ եռանկյունների համընկնելիության երկրորդ հայտանիշի՝ **ΔAKM ≅ ΔKBL**: Դա նշանակում է, որ այդ եռանկյուններում նաև **AM ≅ KL**, **KM ≅ BL**: Այժմ հեշտ է ստուգել, որ **ΔKBL ≅ ΔLMK**, որից հետո գալիս ենք **ΔLMK ≅ ΔMLC** պայմանին: Ուրեմն **AKM, KBL, MLC, LMK** եռանկյունները զույգ առ զույգ համընկնելի են: Այսպիսով, գալիս ենք հետևյալ եզրահանգումներին:



Նկ. 177

1. L և **M** կետերը **ABC** եռանկյան **BC** և **AC** կողմերի միջնակետերն են:

2. $KL \parallel AC$, $KM \parallel BC$, $LM \parallel AB$

3. $KL = \frac{1}{2}AC$, $KM = \frac{1}{2}BC$, $LM = \frac{1}{2}AB$

4. ABC եռանկյան միջին գծերը որոշում են նույն ձևի **KLM** եռանկյուն, որի պարագիծը երկու անգամ փոքր է **ABC** եռանկյան պարագծից:

Ամփոփելով՝ կարող ենք ձևակերպել հետևյալ պնդումները:

Թեորեմ 8: Էվկլիդեսյան հարթության մեջ **ABC** եռանկյան միջին գծերը որոշում են մի եռանկյուն, որի կողմերը զուգահեռ են այդ եռանկյան համապատասխան կողմերին, իսկ գագաթները դրա կողմերի միջնակետերն են:

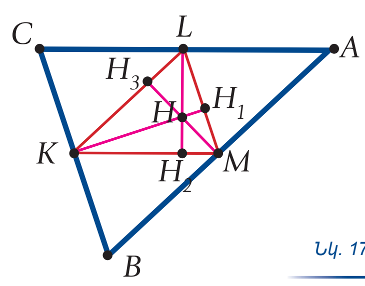
Թեորեմ 9: Կամայական եռանկյան միջին գծի երկարությունը հավասար է դրան զուգահեռ կողմի երկարության կեսին:

Հետևանք: Էվկլիդեսյան հարթության մեջ եռանկյան միջին գծերը զուգահեռ են այդ եռանկյան համապատասխան կողմերին, իսկ դրանց երկարությունները հավասար են այդ կողմերի երկարությունների կեսին:

KLM եռանկյունը անվանում են ներգծված **ABC** եռանկյանը, եթե **K, L, M** կետերը պատկանում են **ABC** եռանկյան կողմերին և չեն համընկնում դրա գագաթներին: Այդպիսի եռանկյան օրինակ տրված է **267**-րդ խնդրում: Ուրեմն կամայական **ABC** եռանկյան միջին գծերը կազմում են եռանկյուն, որը ներգծված է **ΔABC**-ին: Ավելին, դա **ΔABC**-ին ներգծված միակ եռանկյունն է, որի կողմերը զուգահեռ են **ΔABC**-ի համապատասխան կողմերին:

Թեորեմ 10: Էվկլիդեսյան հարթության մեջ կամայական եռանկյան բարձրությունները պարունակող ուղիղները հատվում են միևնույն կետում:

Ապացուցում: Ստուգենք, որ կամայական **KLM** եռանկյան KH_1, LH_2, MH_3 բարձրությունները պարունակող ուղիղները հատվում են միևնույն **H** կետում: Դրա համար այդ եռանկյան յուրաքանչյուր գագաթով տանենք ուղիղ, որը զուգահեռ է հանդիպակաց կողմին (նկ. **178**): Այդ ուղիղները զույգ առ զույգ հատվում են և որոշում են **ABC** եռանկյուն, որում ըստ կառուցման



Նկ. 178

KL, LM, MK հատվածները միջին գծեր են: Այժմ մնում է նկատել, որ **KLM** եռանկյունը **ΔABC**-ին ներգծված միակ եռանկյունն է, որի կողմերը զուգահեռ են **ΔABC**-k համապատասխան կողմերին: Բացի այդ, **KLM** եռանկյան $\mathbf{KH_1}$, $\mathbf{LH_2}$, $\mathbf{MH_3}$ բարձրությունները պարունակող ուղիղները միաժամանակ **ΔABC**-ի կողմերի միջնուղղահայացներն են: Ըստ **§**2-ի հետևանք **3**-ի՝ այդ միջնուղղահայացները հատվում են միևնույն կետում: Ուրեմն KLM եռանկյան բարձրությունները պարունակող ուղիղները նույնպես հատվում են միևնույն կետում: Թեորեմն ապացուցված է:

Ինչպես գիտենք, այդ **H** կետը կոչվում է եռանկյան օրթոկենտրոն:

Գործնական առաջադրանքներ

440. Գծել երկու հատվող ուղիղ: Դրանցից մեկի վրա ընտրել որևէ կետ և այդ կետով տանել ուղիղ, որը զուգահեռ է երկրորդ ուղղին:

441. Գծել որևէ **ABC** եռանկյուն, կառուցել դրա միջին գծերով որոշվող **KLM** եռանկյունը, որից հետո **KLM** եռանկյան միջին գծերով որոշվող **PQR** եռանկյունը: Ի՞նչ առանձնահատկություն եք նկատում **PQR** և **ABC** եռանկյունների փոխադարձ դասավորության մեջ: Ձևակերպել արդյունքը թեորեմի տեսքով: **PQR** եռանկյան պարագիծը արտահայտել **ABC** եռանկյան պարագծով:

442. Գծել որևէ բութանկյուն եռանկյուն և կառուցել դրա միջին գծերը: Ի՞նչ տեսակի եռանկյուն ստացվեց: Ստուգել այդ երևույթը բոլոր տեսակի եռանկյունների դեպքում: Ձևակերպել արդյունքը թեորեմի տեսքով:

443. Օգտագործել **Paint** ծրագիրը, գծել որևէ բութանկյուն եռանկյուն և կառուցել դրա բարձրությունները պարունակող ուղիղների հատման կետը:

444. Նշել զուգահեռ հատվածների բնօրինակներ շրջակա միջավայրում:

445. Ճշմարի՞տ է արդյոք, որ զուգահեռ ուղիղները ավելի շատ բացառություն են, քան կանոն ուղիղների զույգերի բազմության մեջ:

446. Ինչպե՞ս գործնականում ստուգել տրված երկու ուղիղների զուգահեռությունը:

447. Ճշմարի՞տ է արդյոք, որ ուղիղների զուգահեռության հարաբերությունը սիմետրիկ է. եթե **a || b**, ապա **b || a**:

448. Ճշմարի՞տ է արդյոք, որ ուղիղների զուգահեռության հարաբերությունը փոխանցական է. եթե **a || b** և **b || c**, ապա **a || c**:

449. Ո՞ր կետում են հատվում ուղղանկյուն եռանկյան բարձրությունները:

450. Զուգահեռ ուղիղների զույգը ուղղով հատելիս առաջացած անկյուններից մեկի աստիճանային չափը **105°** է: Որոշել մնացած անկյունների մեծությունները:

451. Ապացուցել, որ **30°** սուր անկյունով ուղղանկյուն եռանկյան ներքնաձիգը երկու անգամ մեծ է այդ անկյան հանդիպակաց էջից:

452. Ապացուցել, որ եթե ուղղանկյուն եռանկյան ներքնաձիգը երկու անգամ մեծ է այդ եռանկյան էջից, ապա այդ էջի հանդիպակաց անկյան աստիճանային չափը **30°** է:

453. **ABC** եռանկյան ներքին տիրույթում ընտրված է **D** կետ այնպես, որ **∠BCD + ∠BAD > ∠DAC**: Ապացուցել, որ **AC > DC**:

454. Որոշել **ABC** եռանկյան անկյունների մեծությունները, եթե դրանք հարաբերում են որպես **5:3:2**:

455. **ABC** եռանկյան **AM** միջնագիծը երկու անգամ փոքր է **BC** կողմից: Ապացուցել, որ **ABC**-ն ուղղանկյուն եռանկյուն է:

456. **ABC** և **ADC** եռանկյունները համընկնելի են, ընդ որում՝ **B** և **D** կետերը դասավորված են **AC** ուղղի տարբեր կողմերում: Ապացուցել, որ կա՛մ **AB||CD** և **BC || AD**, կա՛մ էլ **AC ⊥ BD**:

457. **KM** հիմքով **KLM** կիսականոնավոր եռանկյան մեջ տարված է **KN** կիսորդը: Որոշել **KNM** անկյան մեծությունը, եթե **∠M = 40°**:

458. **ABC** եռանկյան **A** և **C** անկյունները համընկնելի են: Ապացուցել, որ **C** գագաթում արտաքին անկյան կիսորդը զուգահեռ է եռանկյան **AB** կողմին:

459. Կիսականոնավոր եռանկյան անկյուններից մեկի մեծությունը. **ա) 92°** է, **բ) 88°** է: Հաշվել այդ եռանկյան մնացած անկյունների մեծությունները: Քանի՞ լուծում ունի խնդիրը **բ)** դեպքում:

460. Եռանկյան երկու արտաքին անկյունների մեծությունները հավասար են **100°**-ի և **130°**-ի: Որոշել այդ եռանկյան ներքին անկյունների և երրորդ արտաքին անկյան մեծությունները:

461. Համեմատել հետևյալ երկու պնդումները:

Որքան մեծ է եռանկյան անկյան մեծությունը, այնքան փոքր է այդ անկյան գագաթից տարված բարձրությունը:	Որքան փոքր է եռանկյան տրված գագաթից տարված բարձրությունը, այնքան մեծ է այդ գագաթում եռանկյան անկյան մեծությունը:

Ճշմարի՞տ են արդյոք այդ պնդումները: Կազմել համանման երկու պնդում:

462. **ABC** բութանկյուն եռանկյան բարձրությունները պարունակող ուղիղները հատվում են **O** կետում, ընդ որում՝ **ΔBOC** ≅ **ΔBCO, ΔBOA** ≅ **ΔBAO**: Հաշվել **BCA** անկյան աստիճանային չափը, եթե այն չորս անգամ փոքր է բութ անկյան մեծությունից:

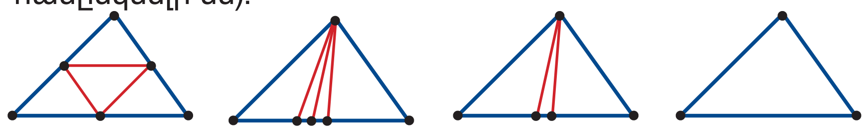
463. Տրված անկյան ներսում կառուցված է մեկ այլ անկյուն, որի կողմերը զուգահեռ են այդ անկյան կողմերին: Ապացուցել, որ կառուցված և տրված անկյունների կիսորդները կա՛մ զուգահեռ են, կա՛մ էլ դասավորված են միևնույն ուղղի վրա:

464. Ապացուցել թեորեմ **7**-ը:

465. Ապացուցել, որ կամայական **ABC** եռանկյան միջին գծերով որոշվող եռանկյունը **ΔABC**-ին ներգծված միակ եռանկյունն է, որի կողմերը զուգահեռ են **ΔABC**-ի համապատասխան կողմերին:

466. **ABC** եռանկյան պարագիծը պարզ թիվ է: Ապացուցել, որ այդ եռանկյան միջին գծերից առնվազն մեկի երկարությունը ամբողջ թիվ չէ:

467. Օգտագործելով տրված նկարները՝ կազմել և ապացուցել եռանկյունների համընկնելիության հայտանիշներ (օրինակ՝ երկու եռանկյուն համընկնելի են այն և միայն այն դեպքում, եթե դրանց համապատասխան միջին գծերը համընկնելի են):



Ինքնուրույն կազմել այդպիսի հայտանիշ:

468. **ABC** եռանկյան **AC** կողմին զուգահեռ **MN** հատվածի ծայրակետերը պատկանում են այդ եռանկյան մնացած երկու կողմերին, և դրա երկարությունը երկու անգամ փոքր է **AC** հատվածի երկարությունից: Հետևո՞ւմ է արդյոք այստեղից, որ **MN** հատվածը **ABC** եռանկյան միջին գիծն է:

469. **ABC** ուղղանկյուն եռանկյան ուղիղ անկյան **B** գագաթից տարված են **BM** միջնագիծը և **BD** կիսորդը, որոնք կազմում են **12°** մեծության անկյուն: Հաշվել այդ եռանկյան սուր անկյունների մեծությունները:

470. **ABC** ուղղանկյուն եռանկյան ուղիղ անկյան **B** գագաթից տարված է **BH** բարձրությունը: Ապացուցել, որ $\angle A \cong \angle HBC$, $\angle ABH \cong \angle C$:

471. **BM**, BB_1 և **BH** հատվածները համապատասխանաբար **ABC** սուրանկյուն եռանկյան միջնագիծն է, կիսորդը և բարձրությունը: Այդ հատվածներից ո՞րն է. ա) ամենաերկարը, **բ)** ամենակարճը: Պատասխանել համանման հարցի ուղղանկյուն և բութանկյուն եռանկյունների համար և ձևակերպել ընդհանուր արդյունքը: Այն քննարկել համադասարանցիների հետ:

472. Ապացուցել, որ բութանկյուն եռանկյան ամենամեծ կողմը ավելի քան երկու անգամ մեծ է այդ կողմին տարված միջնագծից:

§4. ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱԿԱՆ ԱՌԱՋԱԴՐՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

Ապացուցումները երկրաչափության մեջ։ Ինչպես արդեն գիտեք, երկրաչափական փաստերը հիմնավորելու համար անհրաժեշտ է դրանք ապացուցել: Հին Հունաստանում այդ ապացուցումները կատարում էին՝ ուսումնասիրելով գծագիրը, որովհետև այն ժամանակ չկային տառային նշանակումներ և, հետևաբար, չկային ո՛չ հավասարումներ, ո՛չ էլ բանաձևեր ներկայիս պատկերացմամբ: Դա պահանջում էր հետազոտողից մեծագույն հնարամտություն և զարգացած երևակայություն: Սակայն միշտ չէ, որ, միայն ուսումնասիրելով գծագիրը, կամ ավելի ճիշտ, միայն նայելով գծագրին, հնարավոր է կատարել ճիշտ եզրակացություններ: Բանն այն է, որ մարդու տեսողությունը կատարյալ չէ և առանձին դեպքերում կարող է լինել սխալ կողմնորոշման պատճառ: Ուշադիր նայեք նկար **179**-ում պատկերվածին և փորձեք կռահել, թե որ հատվածն է ավելի երկար: Թվում է, թե ուղղաձիգ հատվածն ավելի երկար է, քան հորիզոնականը, սակայն եթե քանոնով չափեք այդ հատվածները, ապա կհամոզվեք, որ այդ հատվածներն ունեն նույն երկարությունը: Հաջորդ պատկերը Պենրոուզի անհնար եռանկյունն է: Այսպիսով, միայն գծագրի միջոցով ստացված տեղեկատվությունը կարող է ստույգ չլինել: Ուրեմն երկրաչափական փաստերը անհրաժեշտ է ապացուցել:

Նկ. 179

Մենք արդեն ապացուցել ենք թեորեմներ որոշ երկրաչափական պատկերների մասին և կարող ենք եզրահանգումներ անել դրանցում կիրառված դատողությունների վերաբերյալ: Թեորեմը մաթեմատիկական առաջադրություն է, որն անհրաժեշտ է ապացուցել, այսինքն՝ հիմնավորել դրա ճշմարտացիությունը: Թեորեմի պնդումը կարող է լինել պարզ, անվիճելի, ակնհայտ կամ բավականին բարդ, նույնիսկ վիճելի: Սակայն ցանկացած դեպքում դրա ապացուցումը այն դարձնում է ստույգ, հիմնավորված, կիրառելի: Կան թեորեմներ, որոնք մինչ օրս ապացուցված չեն, դրանց պնդումները կրում են ենթադրական բնույթ: Աքսիոմների համակարգի հիման վրա տրամաբանական դատողություններով ստանում են ավելի ու ավելի բարդ թեորեմներ, որոնք նկարագրում են հիմնական և ներմուծված երկրաչափական պատկերների և հարաբերությունների հատկությունները: Այդ ընթացքում կարող են ներմուծվել նոր աքսիոմներ, որոնք հնարավորություն են տալիս բացահայտել երկրաչափական պատկերների նորանոր հատկություններ: Օրինակ՝ ելնելով միայն **1°- 2°** աքսիոմից՝ հնարավոր չէ ներմուծել հատվածի, եռանկյան հասկացությունները և առավել ևս ուսումնասիրել դրանց հատկությունները: Դիտարկենք ևս մեկ օրինակ: Եռանկյան արտաքին անկյան մասին թեորեմն ապացուցվել է առանց զուգահեռության աքսիոմի օգտագործման: «Եռանկյան ցանկացած արտաքին անկյան մեծությունը մեծ է իրեն ոչ կից ներքին անկյան մեծությունից»: Էվկլիդեսի զուգահեռության աքսիոմի ներմուծումը ազդում է այդ թեորեմի վրա հետևյալ կերպ. «Եթե տեղի ունի Էվկլիդեսի զուգահեռության աքսիոմը, ապա եռանկյան ցանկացած արտաքին անկյան մեծությունը հավասար է իրեն ոչ կից ներքին անկյունների մեծությունների գումարին»: Պարզ է, որ այդպիսի ձևակերպումը կարող է ունենալ ավելի լայն կիրառություններ: Սակայն առաջին տարբերակը նույնպես կարևոր է, քանի որ այն կրում է ավելի ընդհանուր բնույթ և տեղի ունի ոչ միայն Էվկլիդեսյան, այլև հիպերբոլական երկրաչափության մեջ: Թեորեմի ապացուցումն իրենից ներկայացնում է անթերի, համոզիչ տրամաբանական դատողություն, որը թեորեմի պնդումը դարձնում է անվիճելի: Այդպիսի դատողությունների նմուշները ավելի քան երկու հազար տարիների ընթացքում ընտրվել և ուսումնասիրվել են մաթեմատիկոսների կողմից: Դրանց մի մասը տեղ է գտել տվյալ դասագրքում: Դիտարկենք այդպիսի ապացուցումների առավել հայտնի եղանակներ:

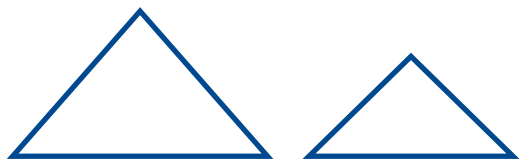
Թեորեմների ապացուցման առավել տարածված մեթոդներից մեկը լատիներեն անվանում են **«reductio ad absurdum»**, որը նշանակում է «հանգել հակասության»: Սովորաբար թեորեմի պնդումը տրոհում են երկու մասի, դրանցից առաջինը արտահայտում է խնդրի տվյալները (թեորեմի պայմանը), իսկ երկրորդը՝ ապացուցելի մասը (թեորեմի եզրակացությունը): Եթե թեորեմի պնդումը ճշմարիտ է, ապա եզրակացությունը արտածվում է պայմանից տրամաբանական դատողությունների միջոցով, որոնք ոչ այլ ինչ են, եթե ոչ մարդկային ողջամտության մաթեմատիկական ձևը: Հակասության բերման մեթոդի կիրառման դեպքում ենթադրում են, որ թեորեմի պայմանը ճշմարիտ է, իսկ եզրակացությունը՝ ոչ (կեղծ): Իհարկե, դա հնարավոր չէ և վաղ թե ուշ տրամաբանական դատողությունները բացահայտում են հակասություն: Հակասությունը նշան է, որ կատարված ենթադրությունը կեղծ է, հետևաբար իրականում թեորեմի եզրակացությունը ճշմարիտ է: Այդ եղանակով ապացուցվել են, օրինակ, եռանկյունների հավասարության առաջին և երկրորդ հայտանիշները, ինչպես նաև շատ այլ թեորեմներ: Ապացուցման այլ տարածված եղանակ է երկրաչափական պատկերի անմիջական կառուցումը: Այդպես ապացուցվել է, օրինակ, եռանկյան արտաքին անկյան մասին առաջին թեորեմը: Այդպիսի ապացուցումներն անվանում են **կառուցողական ապացուցումներ**:

Թեորեմների ապացուցման հաջորդ հայտնի եղանակը հիմնված է թեորեմի մի քանի տվյալների համեմատման վրա և այդ պատճառով կոչվում է **համադրման մեթոդ**: Այդ եղանակով է ապացուցվել եռանկյան արտաքին անկյան մասին Էվկլիդեսյան թեորեմը:

Որոշ դեպքերում թեորեմի պնդման ճշմարտացիության ստուգումը հանգեցնում են մի քանի մասնավոր դեպքերի ուսումնասիրմանը: Այդ պատճառով այդ եղանակն անվանում են **թվարկման մեթոդ**: Այդ եղանակը կիրառվել է, օրինակ, տրված կետից տրված ուղղին տարված ուղղահայացի միակության ապացուցման դեպքում: Ճիշտ է, տվյալ դեպքում ապացուցումը հանգել է ընդամենը երկու դեպքերի ուսումնասիրմանը, սակայն ավելի բարդ թեորեմներում հնարավոր դեպքերի քանակը կարող է լինել ավելի մեծ: Նշենք, որ թվարկման մեթոդը հարմար է համակարգչային նկարագրության համար և այն հաճախ կիրառվում է համակարգչային մաթեմատիկական ծրագրերում:

Այժմ քննարկենք թեորեմների մի քանի տեսակ: Օժանդակ բնույթի թեորեմն անվանում են Լեմ: Բարդ թեորեմներ ապացուցելիս երբեմն ապացուցումը տրոհում են մի քանի մասի, որոնցից յուրաքանչյուրը ինչ-որ Լեմի ապացուցում է:

Որոշ դեպքերում թեորեմի պայմանը և եզրակացությունը փոխում են տեղերով և ստանում նոր թեորեմ: Այդ դեպքում այդ երկու թեորեմներն անվանում են **հակադարձ թեորեմներ**: *Օրինակ՝ «Եթե* *եռանկյան երեք կողմերը զույգ առ զույգ համընկնելի են, ապա այդ եռանկյան երեք միջնագծերը զույգ առ զույգ համընկնելի են»* թեորեմի պնդման հակադարձն է *«Եթե եռանկյան երեք միջնագծերը զույգ առ զույգ համընկնելի են, ապա այդ եռանկյան երեք կողմերը զույգ առ զույգ համընկնելի են»* պնդումը: Տվյալ դեպքում հակադարձ պնդումը ճշմարիտ է: Սակայն հնարավոր է, որ թեորեմի պնդման հակադարձ պնդումը լինի կեղծ: Օրինակ՝ *«Եթե երկու եռանկյուններ համընկնելի են, ապա դրանց համապատասխան անկյունները զույգ առ զույգ համընկնելի են»* ակնհայտ պնդման հակադարձն է *«Եթե երկու եռանկյունների համապատասխան անկյունները զույգ առ զույգ համընկնելի են, ապա այդ եռանկյունները համընկնելի են»* կեղծ պնդումը (նկ. **180**):



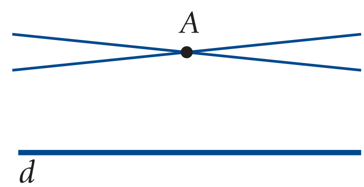
Նկ. 180

Եթե թեորեմը և դրա հակադարձ թեորեմը ճշմարիտ են, ապա երբեմն դրանք միավորում են մեկ թեորեմի տեսքով: Նշենք այդպիսի թեորեմների օրինակներ (ձախ և աջ վանդակներում ներկայացված է նույն թեորեմը՝ տարբեր համարժեք ձևակերպումներով):

Որպեսզի եռանկյան գագաթը հանդիպակաց կողմի կետին միացնող հատվածը լինի այդ եռանկյան անկյան կիսորդ, անհրաժեշտ է և բավարար, որ այդ հատվածի յուրաքանչյուր կետ լինի հավասարահեռ այդ անկյան կողմերից:	Եռանկյան գագաթը հանդիպակաց կողմի կետին միացնող հատվածը այդ եռանկյան անկյան կիսորդ է այն և միայն այն դեպքում, եթե այդ հատվածի յուրաքանչյուր կետ հավասարահեռ է այդ անկյան կողմերից:
Որպեսզի երկու ուղիղ լինեն զուգահեռ, անհրաժեշտ է և բավարար, որ այդ ուղիղների ցանկացած հատող կազմի դրանց հետ համընկնելի խաչադիր անկյուններ:	Երկու ուղիղ զուգահեռ են այն և միայն այն դեպքում, եթե այդ ուղիղների ցանկացած հատող դրանց հետ կազմում է համընկնելի խաչադիր անկյուններ:

Համոզվելու համար, որ տվյալ թեորեմի հակադարձ թեորեմի պնդումը ճշմարիտ չէ, բավական է նշել ժխտօրինակ: Դիտարկենք պարզ օրինակ: «Եթե երկու եռանկյուններ համընկնելի են, ապա դրանցում գոյություն ունեն երկուական համընկնելի կողմեր և մեկական համընկնելի անկյուն» թեորեմի պնդման հակադարձ պնդումն է «Եթե երկու եռանկյուններում գոյություն ունեն երկուական համընկնելի կողմեր և մեկական համընկնելի անկյուն, ապա այդ եռանկյունները համընկնելի են»: Այդ պնդումը կեղծ է: Դրանում համոզվելու համար բավական է նշել ժխտօրինակը, որը տրվել է եռանկյունների համընկնելիության առաջին հայտանիշը ապացուցելուց հետո: Այդ օրինակը ցույց է տալիս նաև թեորեմների ձևակերպումների բազմազանությունը և ամեն անգամ թեորեմների պայմանների և եզրակացության վերլուծության անհրաժեշտությունը: Նպատակը դրանց միջև ճշգրիտ առնչություն բացահայտելն է: Տրված պայմաններից հնարավոր է ստանալ զանազան եզրակացություններ, և սովորաբար աշխատում են ստանալ առավելագույնը: Դա հնարավորություն է տալիս առանձնացնել նաև ավելի թույլ եզրակացություններ: Առավելագույն եզրակացությունը սովորաբար ներկայացնում են հայտանիշի տեսքով: Օրինակ՝ «Եթե երկու եռանկյուն համընկնելի են, ապա դրանց համապատասխան կողմերը համընկնելի են», և հակառակը՝ *«Եթե երկու եռանկյուններում համապատասխան կողմերը համընկնելի են, ապա այդ եռանկյունները համընկնելի են»*: Այժմ, եթե թուլացնենք առաջին թեորեմի եզրակացությունը, ապա կարող ենք ստանալ նոր ճշմարիտ պնդումներ, օրինակ՝ *«Եթե երկու եռանկյուն համընկնելի են, ապա այդ եռանկյուններում գոյություն ունեն համընկնելի կողմերի զույգեր»*: Սակայն այստեղ խախտվում է թեորեմի պայմանի և եզրակացության հավասարակշռությունը, և հակադարձ պնդումը կեղծ է: Մյուս կողմից, եթե որևէ հայտանիշում թուլացնենք պայմանները, ապա կստանանք պնդումներ, որոնք ճշմարիտ չեն, իսկ դրանք հետաքրքրություն չեն ներկայացնում: Ուրեմն հետաքրքրական են տվյալ պայմաններից առավելագույն եզրակացության ստացման խնդիրները: Երկրաչափության պատմության մեջ այդպիսի խնդրի լուծման ամենահետաքրքիր օրինակն է Էվկլիդեսի **V** նախադրույթի (տե՛ս խնդիր **406**-ը) ավելի քան երկուհազարամյա պատմությունը: Այդ նախադրույթը էապես ավելի բարդ է, քան Էվկլիդեսի մնացած նախադրույթները: Առաջին հայացքից կարող է թվալ, որ այն հնարավոր է ապացուցել՝ հիմնվելով Էվկլիդեսի աքսիոմների և նախորդ չորս նախադրույթների վրա: Շուրջ երկու հազար տարվա ընթացքում հաջողվեց պարզել, որ առանց զուգահեռության աքսիոմի հնարավոր է ապացուցել միայն, որ եռանկյան ներքին անկյունների մեծությունների գումարը չի կարող գերազանցել **180°**:

Եթե խնդիրը լուծելիս օգտագործվել են այդ խնդրի բոլոր տվյալները, սակայն, միևնույն է, խնդիրը չի լուծվում, ապա հաճախ գտնում են ելքը՝ փոխելով խնդրի դրվածքը: Գերմանացի մաթեմատիկոս Բարտելսը Դորպատի (այժմ՝ Տարտու, Էստոնիա) համալսարանից առաջիններից էր, որ եկավ այլ մոտեցման: Նա առաջարկեց հեռացնել Էվկլիդեսի **V** նախադրույթը և դրա փոխարեն տեղադրել դրա ժխտումը: Եթե ստացվի հակասություն, ապա դա կնշանակի, որ **V** նախադրույթը թեորեմ է: Եթե ընդունենք այդ պնդումը, ապա պետք է ընդունենք դրան համարժեքը՝ տրված **d** ուղղին չպատկանող **A** կետով (**d, A**) հարթության մեջ **A** կետով հնարավոր է տանել առնվազն երկու ուղիղ, որոնք չեն հատում **d** ուղիղը (նկ. **181**):

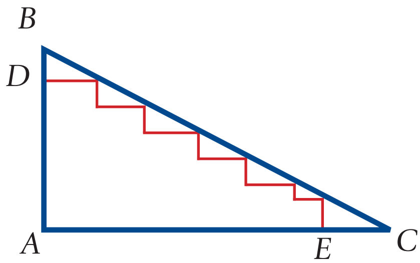


Նկ. 181

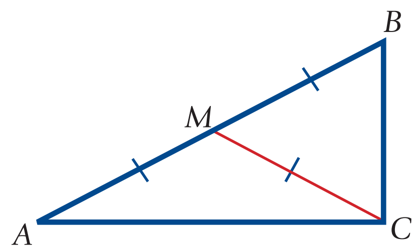
Գործնական առաջադրանքներ, հարցեր և խնդիրներ

473. Գծել երկրաչափական պատկերներ, որոնց չափական տվյալները չեն համապատասխանում դրանց ընկալմանը:

474. Արտագծել նկար **183**-ը տետրում: Ինչի՞ է հավասար կարմիր գույնով ներկված բեկյալի երկարությունը: Պատասխանը հիմնավորել և քննարկել համադասարանցիների հետ:



Նկ. 183



Նկ. 184

475. Արտագծել նկար **184**-ը տետրում: Ի՞նչ երկրաչափական փաստ է ցուցադրում այդ նկարը:

476. Ի՞նչ է իրենից ներկայացնում թեորեմի ապացուցումը:

477. Նկարագրել թեորեմների ապացուցման. ա) հակասող ենթադրությամբ, **բ)** թվարկման, **գ)** համադրման մեթոդը:

478. Նշել երկու-երեք թեորեմ, որոնք ապացուցվել են թվարկման մեթոդով: Նկարագրել թվարկման մեթոդի էությունը:

479. Նշել երկու-երեք թեորեմ, որոնք ապացուցվել են հակասող ենթադրությամբ: Ո՞րն է այդ մեթոդի բովանդակությունը:

480. Նշել երկու-երեք թեորեմ, որոնք ապացուցվել են համադրման մեթոդով: Որո՞նք են այդ մեթոդի առանձնահատկությունները:

481. Ձևակերպել հետևյալ պնդումների հակադարձները և քննարկել դրանց ճշմարտացիությունը համադասարանցիների հետ. **ա)** եթե երկու ուղիղ զուգահեռ են, ապա ունեն ընդհանուր ուղղահայաց, **բ)** եթե **d** ուղղին չպատկանող **A** կետով (**d, A**) հարթության մեջ անցնում է ավելի քան մեկ ուղիղ, որը չի հատում **d**-ն, ապա այդ կետով անցնում են անթիվ բազմությամբ ուղիղներ, որոնք չեն հատում այդ ուղիղը, **գ)** եթե երկու հատված զուգահեռ են և ունեն տարբեր երկարություններ, ապա այդ հատվածներից մեկը մեծ է մյուսից:

482. Ապացուցել «Եթե երկու ուղիղ ունեն երկու ընդհանուր ուղղահայաց, ապա տեղի ունի Էվկլիդեսի զուգահեռության աքսիոմը» պնդումը, կիրառելով հակասող ենթադրության մեթոդը:

483. Ապացուցել, որ եթե եռանկյան անկյունները զույգ առ զույգ համընկնելի են, ապա այդ եռանկյան կողմերը զույգ առ զույգ համընկնելի են:

484. Ի՞նչն է պատճառը, որ եռանկյունների բազմության մեջ բացակայում է կարգի հարաբերությունը: Եռանկյունների բազմության ո՞ր ենթաբազմության համար է հնարավոր ներմուծել «**ABC** եռանկյունը մեծ է **KLM** եռանկյունից» հասկացությունը:

485. Ճշմարի՞տ է արդյոք, որ կամայական **ABC** եռանկյան կողմերի միջնակետերով որոշվող եռանկյան անկյունները համընկնելի են **ABC** եռանկյան համապատասխան անկյուններին: Պատասխանը հիմնավորել և քննարկել համադասարանցիների հետ:

486. Չնարավո՞ր է արդյոք, որ. **ա)** աքսիոմի պնդման ժխտումը լինի աքսիոմ, **բ)** թեորեմի պնդման ժխտումը լինի թեորեմ: Պատասխանը հիմնավորել և քննարկել համադասարանցիների հետ:

487. Ճշմարի՞տ է արդյոք, որ հակադարձ թեորեմների զույգը ձևավորում է հայտանիշ: Պատասխանը հիմնավորել օրինակներով և քննարկել համադասարանցիների հետ:

488. Քանի՞ եղանակով է հնարավոր ժխտել Էվկլիդեսի զուգահեռության աքսիոմը: Պատասխանը հիմնավորել և քննարկել համադասարանցիների հետ:

III ԳԼԽԻ ԿՐԿՆՈՒԹՅԱՆ ՀԱՐՑԵՐ

489. Ի՞նչ անկյուններ են առաջանում երկու ուղիղները երրորդով հատելիս: Ի՞նչ առնչություններ են առաջանում այդ անկյունների համար, եթե ուղիղները զուգահեռ են:

490. Ո՞ր ուղիղներն են կոչվում զուգահեռ: Նշել զուգահեռության օրինակներ ձեր շրջապատից:

491. Ձևակերպել և ապացուցել ուղիղների զուգահեռության հայտանիշները:

492. Նկարագրել զուգահեռ ուղիղների կառուցման գործնական եղանակները և համապատասխան գործիքները:

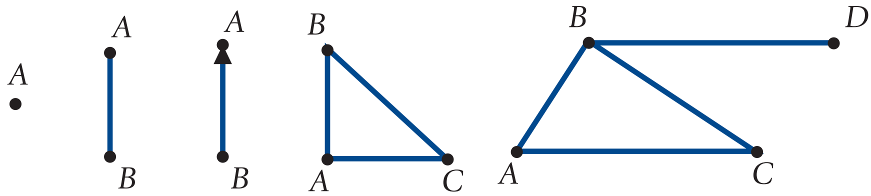
493. Ձևակերպել և ապացուցել երկու զուգահեռ ուղիղները հատողով հատելիս առաջացող անկյունների հատկությունների մասին թեորեմները:

494. Ձևակերպել և ապացուցել եռանկյան ներքին անկյունների աստիճանային չափերի գումարի մասին թեորեմը:

495. Ձևակերպել և ապացուցել եռանկյան արտաքին անկյան մասին Էվկլիդեսյան թեորեմը:

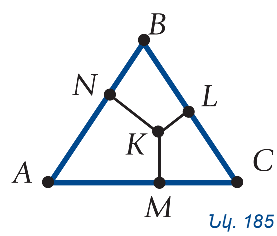
496. Ձևակերպել և ապացուցել զուգահեռ ուղիղների հիմնական հատկությունները:

497. Բացահայտել երկրաչափական պատկերների հաջորդականության օրինաչափությունը և ձևակերպել այն:



498. **ABC** կանոնավոր եռանկյան ներքին տիրույթի **K** կետից այդ եռանկյան կողմերին տարված են **KL, KM, KN** ուղղահայացներ (նկ. **185**): Ընտրել **K** կետն այնպես, որ **DLMN**-ի լինի կանոնավոր:

499. Ճշմարի՞տ է արդյոք, որ եթե թեորեմի պայմանը և եզրակացությունը փոխարինել դրանց ժխտումներով, ապա կստացվի նոր թեորեմ: Պատասխանը հիմնավորել օրինակներով և քննարկել համադասարանցիների հետ:

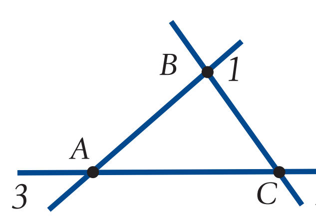


Նկ. 185

ԼՐԱՑՈՒՑԻՉ ԽՆԴԻՐՆԵՐ

500. Նկար **186**-ում $\angle 1 + \angle 2 = 180°$, $\angle 3 = 40°$: Որոշել **ABC** եռանկյան ներքին անկյունների մեծությունները:

501. Եռանկյան բոլոր կողմերը զույգ առ զույգ տարբեր երկարության են: Հնարավո՞ր է արդյոք այդ եռանկյունը տրոհել կանոնավոր եռանկյունների:



Նկ. 186

502. Եռանկյան երկու կողմերի երկարություններն են **1,5** սմ և **0,8** սմ: Որոշել այդ եռանկյան ամենամեծ կողմի երկարությունը, եթե դա ամբողջ թիվ է:

503. **ABC** եռանկյան մեջ նշել կետ, որը հավասարապես է հեռացված գագաթներից:

504. Ապացուցել, որ եթե տրված երկու ուղիղներից մեկը հատող ցանկացած ուղիղ հատում է նաև մյուսը, ապա այդ ուղիղները զուգահեռ են:

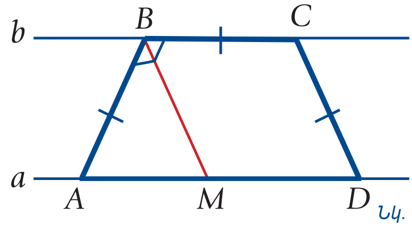
505. Հնարավո՞ր է արդյոք որևէ ուղղանկյուն եռանկյուն տրոհել երկու եռանկյունների, որոնցից մեկը կանոնավոր է, իսկ մյուսը՝ կիսականոնավոր:

506. **ABC** եռանկյան մեջ **∠C = 60°**: **AC** կողմի վրա նշված է այնպիսի **D** կետ, որ **∠BDC = 60°**, **∠ABD = 30°**: Ապացուցել, որ **ABC** եռանկյան պարագիծը փոքր է **BC** կողմի երկարության հնգապատիկից:

507. Ապացուցել, որ ուղղանկյուն եռանկյան ուղիղ անկյան գագաթից տարված բարձրությունը և միջնագիծը կազմում են եռանկյան սուր անկյունների մեծությունների տարբերությանը հավասար մեծության անկյուն:

508. Տրված են **ABC** եռանկյունը և այնպիսի **M, N** կետեր, որ **BM** հատվածի միջնակետը համընկնում է **AC** կողմի միջնակետին, իսկ **CN** հատվածի միջնակետը՝ **AB** կողմի միջնակետին: Ապացուցել, որ **M, N, A** կետերը պատկանում են միևնույն ուղղի:

509. **a** և **b** զուգահեռ ուղիղները **AB** և **CD** ուղիղներով հատելիս առաջացել են **AB** ≅ **CD** ≅ **BC** հատվածներ, ընդ որում՝ **∠B**-ի կիսորդը հատել է **AD** հատվածը **M** միջնակետում (նկ. **187**): Հաշվել **∠A**-ի մեծությունը:



Նկ. 187

510. **ABC** եռանկյան **B** գագաթում արտաքին անկյան աստիճանային չափը **40°** է, իսկ այդ եռանկյան ներքին անկյուններից մեկինը՝ **20°**: Համեմատել **AB** և **BC** հատվածները:

511. **ABC** և **MPK** եռանկյուններում $\angle A + \angle N = 90°$, $BC \cong PK$, $\angle C = \angle K$: Ապացուցել, որ $AB + PK > AC$:

512. Հնարավո՞ր է արդյոք ինչ-որ երկու կիսականոնավոր եռանկյուններից հավաքել կիսականոնավոր եռանկյուն:

513. **B** ուղիղ անկյունով **ABC** եռանկյան մեջ տարված է **BD** բարձրությունը: Ապացուցեք, որ եթե $\angle A < \angle C$, ապա $AD > DC$:

514. Եռանկյան կողմերը զույգ առ զույգ համընկնելի չեն: Հնարավո՞ր է արդյոք այդ եռանկյունը տրոհել երկու համընկնելի եռանկյունների:

ԳԼՈՒԽ IV

ԵՐԿՐԱՉԱՓԱԿԱՆ ԿԱՌՈՒՑՈՒՄՆԵՐ

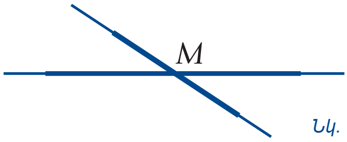
§1. ԿԱՌՈՒՑՄԱՆ ՊԱՐԶԱԳՈՒՅՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐ

Մենք բազմիցս օգտագործել ենք «կառուցել» բառը թեորեմներ ապացուցելիս և խնդիրներ ձևակերպելիս, սակայն, ըստ էության, հստակ չենք պարզաբանել, թե ինչ է դա նշանակում: Մյուս կողմից, երկրաչափական կառուցումները զգալիորեն պարզեցնում են զանազան կառուցվածքների մեկնաբանումները:

Բոլոր կառուցումները կատարվում են միևնույն հարթության մեջ: Առանձնացված է կառուցման երկու գործիք՝ **կարկին և քանոն**: Կարկինի միջոցով կարելի է կառուցել (գծել) տրված կենտրոնով և տրված շառավղով շրջանագիծ կամ դրա մի մասը (աղեղը), տրված ուղղի տրված կետից տեղադրել տրված հատվածին համընկնելի հատված: Քանոնի միջոցով կարելի է կառուցել տրված երկու կետերով որոշվող ուղիղը, ավելի ճիշտ՝ այդ ուղղին պատկանող որևէ հատված: Ուղիղները, հատվածները, շրջանագծերը և դրանց աղեղները համարվում են հիմնական պատկերներ: Կառուցման խնդիրները լուծելիս օգտվում են հետևյալ կանոններից.

1. Կարելի է կառուցել տրված երկու կետերով անցնող ուղիղը (նկ. **188**)
2. Կարելի է կառուցել տրված հատվող ուղիղների հատման կետը (նկ. **189**):
3. Կարելի է կառուցել տրված կենտրոնով շրջանագիծը, որի

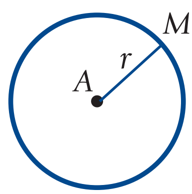
Նկ. 188



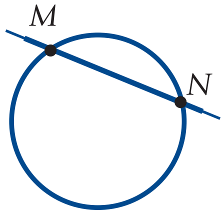
Նկ. 189

շառավիղը տրված հատվածն է (նկ. **190**):
4. Կարելի է կառուցել տրված ուղղի և տրված շրջանագծի հատման կետերը (նկ. **191)**:
5. Կարելի է կառուցել տրված երկու շրջանագծերի հատման կետերը (նկ. **192**):

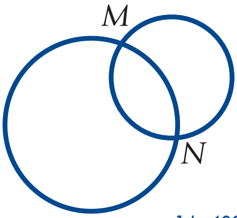
Կառուցման խնդրի դրվածքը հետևյալն է: Տրված է հիմնական պատկերների հավաքածու և տրված է որոնելի երկրաչափական պատ-



Նկ. 190



Նկ. 191

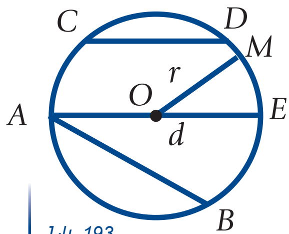


Նկ. 192

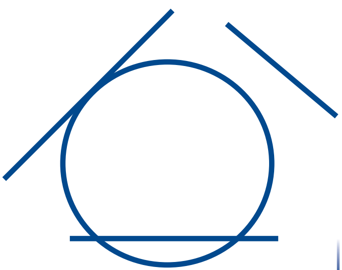
կերի բնութագրիչ հատկությունը: Պահանջվում է, կիրառելով **1-5** կանոնները, կարկինի և քանոնի օգնությամբ վերջավոր թվով քայլերով կառուցել որոնելի պատկերը:

Շրջանագիծը հարթության բոլոր այն կետերի բազմությունն է, որոնց հեռավորությունը **կենտրոն** կոչվող տրված կետից հավասար է **շրջանագծի շառավիղ** կոչվող հատվածի երկարությանը: Կառուցման խնդիրներ լուծելիս շրջանագծի շառավիղ ասելով հասկանում են և՛ կենտրոնը շրջանագծի կետին միացնող հատվածը, և՛ դրա երկարությունը: **O կենտրոնով և r շառավղով շրջանագիծը** ընդունված է նշանակել **S^1(O, r)** (նկ. **190**): Շրջանագծի երկու կետերը միացնող հատվածն անվանում են **շրջանագծի լար**, շրջանագծի կենտրոնով անցնող լարը՝ **շրջանագծի տրամագիծ**: Պարզ է, որ շրջանագծի տրամագիծը երկու անգամ մեծ է այդ շրջանագծի շառավղից: Նկար **193**-ում պատկերված են **S^1(O, r)** շրջանագծի **AB, CD, AE** լարերը, որոնցից **AE** լարն անցնում է շրջանագծի **O** կենտրոնով և, հետևաբար, այդ շրջանագծի տրամագիծն է:

Կառուցման խնդիրներ լուծելիս հաճախ անհրաժեշտ է լինում հետազոտել երկու շրջանագծերի կամ շրջանագծի և ուղղի փոխադարձ



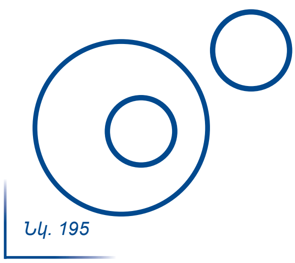
Նկ. 193


Նկ. 194

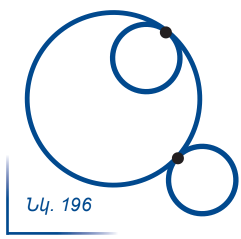
դասավորությունը: Այդ դասավորությունը կախված է համապատասխան երկրաչափական պատկերների հատման կետերի թվից: Ութերորդ դասարանում մենք մանրամասնորեն կուսումնասիրենք այս հարցը, իսկ այժմ սահմանափակվենք ընդհանուր արդյունքների ներկայացմամբ:

Ուղիղը և շրջանագիծը կարող են չհատվել, ունենալ (շոշափել) մեկ ընդհանուր կետ կամ երկու (նկ. **194**): Երկու շրջանագծերը կարող են լինել չհատվող (նկ. **195**), ունենալ (*շոշափել*) մեկ ընդհանուր կետ (նկ. **196**), ունենալ երկու ընդհանուր կետեր (նկ. **197**) և ունենալ երեք ընդհանուր կետեր, այսինքն՝ համընկնել:

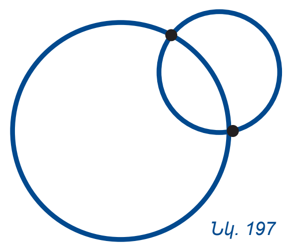
Կառուցման խնդիրներ լուծելիս սովորաբար **1-5** կանոնների փո-



Նկ. 195



Նկ. 196

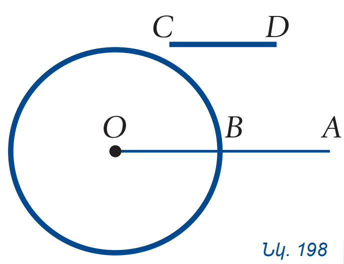


Նկ. 197

խարեն կիրառում են, այսպես կոչված, պարզագույն կառուցումները, որոնք լուծվում են այդ կանոնների օգնությամբ:

Խնդիր 1. Տրված ճառագայթի վրա դրա գագաթից տեղադրել տրված հատվածին համընկնելի հատված:

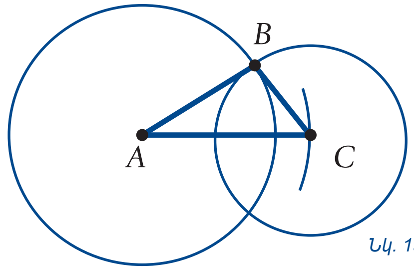
Լուծում: Ըստ աքսիոմ **10**-ի՝ տրված **OA** ճառագայթի վրա դրա **O** գագաթից հնարավոր է տեղադրել տրված **CD** հատվածին համընկնելի միայն մեկ **OB** հատված: Քանի որ **CD** հատվածը և **OA** ճառագայթը տրված են, ուստի խնդիրը լուծելու համար բավական է նախ կառուցել **S¹(O, CD)** շրջանագիծը (նկ. **198**): Այնուհետև ըստ կանոն **4**-ի ստանալ այդ շրջանագծի և **OA** ճառագայթի հատման կետը, որն էլ կլինի որոնելի **B** կետը, քանի որ **OB** ≅ **CD**:



Նկ. 198

Խնդիր 2. Կառուցել եռանկյուն՝ ըստ երեք կողմերի:

Դա նշանակում է, որ տրված է երեք հատված՝ **a, b, c,** որոնք կարող են լինել ինչ-որ **ABC** եռանկյան կողմեր և պահանջվում է կարկինով ու քանոնով կառուցել այդ եռանկյունը:



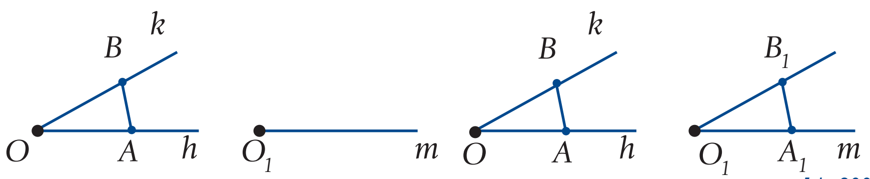
Նկ. 199

Լուծում: Կառուցենք **ABC** եռանկյուն, որում **AB = c, BC = a, AC = b**: Դրա համար վերցնենք ինչ-որ ուղիղ և դրա վրա նշենք որևէ **A** կետ: Կառուցենք այդ ուղղի և (**A, b**) շրջանագծի հատման կետը և այն նշանակենք **C** տառով: Այնուհետև կառուցենք (**A, c**) և (**C, a**) շրջանագծերի հատման կետը և այն նշանակենք **B** տառով (նկ. **199**): **ABC** եռանկյունը որոնելին է:

Խնդիր 3. Տրված ճառագայթից տրված կիսահարթության մեջ տեղադրել տրված անկյանը համընկնելի անկյուն:

Դա նշանակում է, որ որոնելի անկյան մի կողմը պատկանում է տրված ճառագայթը պարունակող ուղղին, իսկ երկրորդ կողմը՝ այդ ուղղի նշված կողմին:

Լուծում: Տրված **Ohk** անկյան **h** և **k** կողմերի վրա նշենք համապատասխանաբար **A** և **B** կետեր (նկ. **200**): Այնուհետև $\mathbf{O_1m}$ տրված ճառագայթը պարունակող ուղղի նշված կողմում կառուցենք **OAB** եռանկյանը համընկնելի $\mathbf{O_1A_1B_1}$ եռանկյուն (տե՛ս խնդիր **2**-ը): Այստեղ $\mathbf{O_1A_1 \subset O_1\ m}$, իսկ **B** կետը դասավորված է $\mathbf{O_1m_1}$ ճառագայթը պարունակող ուղղի նշված կողմում: $\mathbf{O_1A_1B_1}$ և **OAB** եռանկյունները համընկնելի են ըստ երեք կողմերի, այստեղից հետևում է, որ նաև $\angle \mathbf{A_1O_1B_1} \cong \angle \mathbf{AOB} \cong \angle \mathbf{Ohk}$:

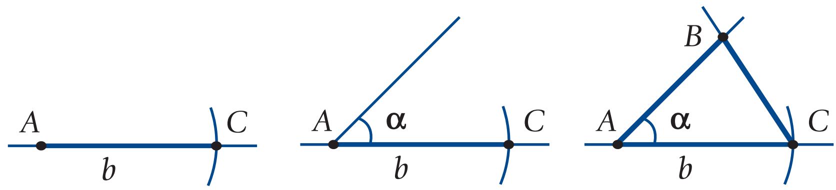


Նկ. 200

Խնդիր 4. Կառուցել եռանկյուն՝ ըստ երկու կողմերի և դրանցով կազմված անկյան:

Այս խնդրի պայմաններին համաձայն տրված են ինչ-որ **c** և **b** հատվածներ և α անկյուն: Պահանջվում է կառուցել այնպիսի **ABC** եռանկյուն, որ **AB = c**, **AC = b** և **∠A = α**:

Լուծում: Վերցնենք կամայական ուղիղ, այդ ուղղի վրա կառուցենք **AC = b** հատված (խնդիր **1**) (նկ. **201**, **ա**): Այնուհետև **AC** ճառագայթի վրա կառուցենք տրված **a** անկյանը համընկնելի անկյուն՝ **∠A = α** (նկ. **201, բ**): Այդ անկյան երկրորդ կողմի վրա **A** գագաթից տեղադրենք **c** հատվածին համընկնելի **AB** հատված (խնդիր **1**) (նկ. **201, գ**): **ΔABC**-ն որոնելին է:

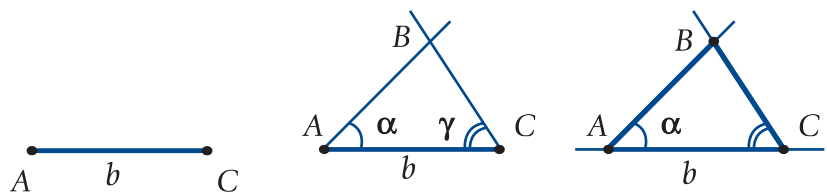


Նկ. 201

Խնդիր 5. Կառուցել եռանկյուն՝ ըստ կողմի և այդ կողմին առընթեր երկու անկյունների:

Ենթադրվում է, որ տրված է **b** հատված և երկու անկյուն՝ α և γ: Պահանջվում է կարկինով և քանոնով կառուցել **ABC** եռանկյուն, որում **AC = b**, **∠A = α**, **∠C = γ**:

Լուծում: Նշանակենք **A** և **C** տառերով տրված հատվածի ծայրակետերը: (նկ. **202, ա**): **AC** ճառագայթի վրա **A** կետում կառուցենք α, իսկ **CA** ճառագայթի **C** կետում γ



Նկ. 202

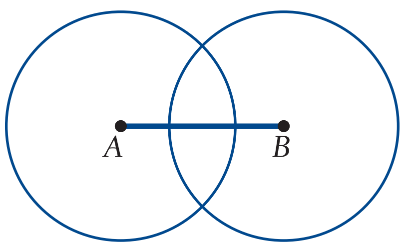
անկյուն: Նշանակենք **B** տառով այդ անկյունների երկրորդ կողմերի հատման կետը (նկ. **202, բ**): **ABC** եռանկյունը որոնելին է (նկ. **202, գ**):

Խնդիր 6: Կառուցել տրված հատվածի միջնակետը:

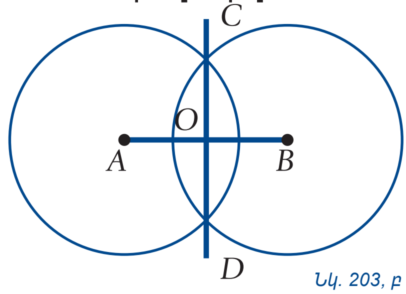
Լուծում: Նշանակենք **A** և **B** տառերով տրված հատվածի ծայրակետերը (նկ. **203, ա**): Կառուցենք **S^1(A, AB)** և **S^1(B, BA)** շրջանագծերի հատման **C** և **D** կետերը, այնուհետև՝ **AB** և **CD** ուղիղների հատման **O** կետը (նկ. **203, բ**): Այդ կետը որոնելին է:

Խնդիր 7. Կառուցել տրված հատվածի միջնուղղահայացը:

Լուծում: Նշանակենք **A** և **B** տառերով տրված հատվածի ծայրակետերը: Կառուցենք **S^1(A, AB)** և **S^1(B, BA)** շրջանագծերի հատման **C** և **D** կետերը և այնուհետև՝ **CD** ուղիղը, որը որոնելին է (նկ. **203, բ**):



Նկ. 203, ա

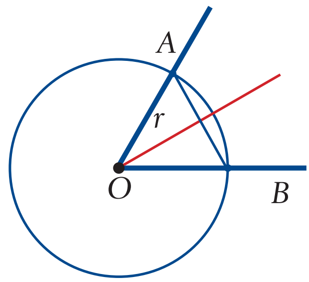


Նկ. 203, բ

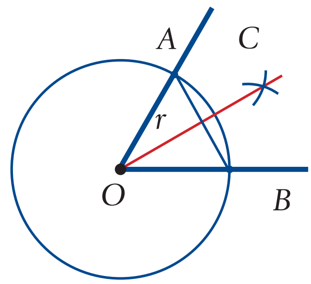
Խնդիր 8. Կառուցել տրված ոչ փռված անկյան կիսորդը:

Լուծում: Նշանակենք **O** կետով տրված անկյան գագաթը: Կառուցենք **S^1(O, r)** շրջանագծի և անկյան կողմերի հատման **A** և **B** կետերը: **AB** հատվածի միջնուղղահայացը որոնելի կիսորդն է (նկ. **204**): Այլ կերպ. կարելի է կառուցել **S^1(A, AB)** և **S^1(B, BA)** շրջանագծերի հատման **C** կետը: **OC** ուղիղը ընդգրկում է որոնելի կիսորդը (նկ. **205**):

Խնդիր 9. Կառուցել տրված կետով անցնող և տրված ուղղին ուղղահայաց ուղիղը:



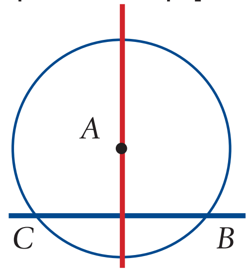
Նկ. 204



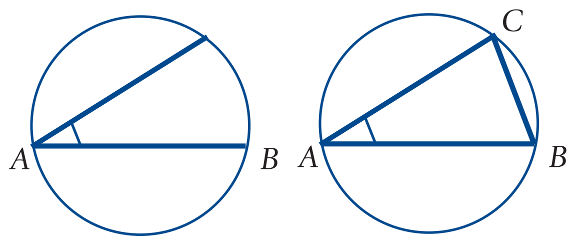
Նկ. 205

Լուծում: Ենթադրենք, որ տրված **A** կետը չի պատկանում տրված ուղղին: Ընտրենք այդ ուղղի որևէ **B** կետ և կառուցենք **S¹(A, AB)** շրջանագծի ու տրված ուղղի հատման երկրորդ՝ **C** կետը: **AC** հատվածի միջնուղղահայացը որոնելի ուղիղն է (նկ. **206**): Նույն կառուցումը պիտանի է այն դեպքում, երբ **A** կետը պատկանում է տրված ուղղին:

Խնդիր 10. Տրված կետում կառուցել ուղիղ, որը զուգահեռ է տրված ուղղին:



Նկ. 206



Նկ. 207

Լուծում: Նախ տրված **A** կետում կառուցում ենք ուղիղ, որն ուղղահայաց է տրված ուղղին, նշում այդ ուղղահայացի և տրված ուղղի հատման **B** կետը և այնուհետև **A** կետում կառուցում ուղիղ, որն ուղղահայաց է **AB** ուղղին:

Խնդիր 11. Կառուցել ուղղանկյուն եռանկյուն՝ ըստ ներքնաձիգի և սուր անկյան:

Լուծում: Տրված **AB** հատվածի (*ներքնաձիգի*)՝ որպես տրամագծի վրա կառուցում ենք շրջանագիծ: Այնուհետև **A** կետում **AB** ճառագայթի վրա կառուցում ենք տրված սուր անկյանը համընկնելի անկյուն: Այդ անկյան երկրորդ կողմը հատում է շրջանագիծը **C** կետում (նկ. **207**): **ABC** եռանկյունը որոնելին է:

Խնդիր 12. Կառուցել ուղղանկյուն եռանկյուն՝ ըստ ներքնաձիգի և էջի:

Լուծում: Տրված **AB** հատվածի (*ներքնաձիգի*)՝ որպես տրամագծի վրա կառուցում ենք շրջանագիծ: Այնուհետև կառուցում ենք **S^1(A, r)** շրջանագիծը, որտեղ **r**-ը տրված երկրորդ հատվածն է (*էջը*), և **C** տառով նշանակում այդ երկու շրջանագծերի հատման կետը: **ABC** եռանկյունը որոնելին է:

Հարցեր և խնդիրներ

515. Տրված են **A, B, M** կետեր, որոնք չեն պատկանում միևնույն ուղղի: Կառուցել այնպիսի **N** կետ, որ **AB** ≅ **MN**:

516. Տրված է **ABC** եռանկյուն: Կառուցել այդ եռանկյան **BH** բարձրությունը:

517. Տրված է **ABC** եռանկյուն: Կառուցել այդ եռանկյան **BM_1** միջնագիծը:

518. Տրված է **ABC** եռանկյուն: Կառուցել այդ եռանկյան **BB_1** կիսորդը:

519. Կառուցել **9** սմ պարագծով կանոնավոր եռանկյուն:

520. Կառուցել տրված **A** կենտրոնով և **r=5** շառավղով շրջանագիծ:

521. Կառուցել. **ա) 4** սմ, **բ) 10** սմ հիմքով և **6** սմ սրունքով կիսականոնավոր եռանկյուն:

522. Տրված է շրջանագիծ (*առանց կենտրոնը նշելու*): Կառուցել այդ շրջանագծի կենտրոնը:

523. Կառուցել **ABC** եռանկյուն, որում **AB = 5** սմ, **BC = 3** սմ, **AC = 4** սմ:

524. Կառուցել տրված **A** և **B** կետերով անցնող շրջանագիծ, որի **O** կենտրոնը պատկանում է տրված **d** ուղղին:

525. Տրված են **A, B, C** կետեր, որոնք չեն պատկանում միևնույն ուղղի: Կառուցել շրջանագիծ, որն անցնում է այդ կետերով: Հիմնավորել այդ շրջանագծի միակությունը:

526. Հնարավո՞ր է արդյոք կառուցել **A** կենտրոնով շրջանագիծ, որն անցնում է **B, C** կետերով: Պատասխանը հիմնավորել և քննարկել համադասարանցիների հետ:

527. Ինչպե՞ս են դասավորված տրված **A, B** կետերով անցնող բոլոր շրջանագծերի կենտրոնները: Պատասխանը հիմնավորել և քննարկել համադասարանցիների հետ:

528. Նկարագրել տրված **A** կետով անցնող **r** շառավղի բոլոր շրջանագծերի կենտրոնների բազմությունը:

529. Հիմնավորել, որ ընդհանուր դեպքում գոյություն չունի շրջանագիծ, որն անցնում է միևնույն ուղղին չպատկանող չորս կետերով: Նշել օրինակներ, երբ գոյություն ունի այդպիսի շրջանագիծ:

530. Քանի՞ շրջանագիծ է անցնում տրված **AB. ա)** հատվածի, **բ)** տրամագծի ծայրակետերով:

531. Ճշմարի՞տ է արդյոք, որ եթե **d** ուղիղը չի անցնում շրջանագծի **O** կենտրոնով և հատում է այն որևէ **A** կետում, ապա կհատի այդ շրջանագիծը առնվազն ևս մեկ **B** կետում: Պատասխանը հիմնավորել օրինակներով:

§2. ԿԱՌՈՒՑՄԱՆ ԽՆԴՐԻ ԼՈՒԾՄԱՆ ԸՆԹԱՑՔԸ

Ի տարբերություն պարզագույն խնդիրների դեպքի՝ ընդհանուր դեպքում կառուցման խնդիրը լուծում են չորս փուլով: Պատճառն այն է, որ ընդհանուր դեպքում խնդրի լուծումն ակնհայտ չէ, և կառուցման խնդրի լուծումը բացահայտելու, անհրաժեշտ կառուցման քայլերը կատարելու, դրանք հիմնավորելու և արդյունքները ամփոփելու համար պահանջվում են որոշ քայլեր:

1. Վերլուծություն. այս փուլում որոնում են խնդրի տվյալների և որոնելի երկրաչափական պատկերի կապերը: Դրա համար ենթադրում են, որ խնդիրն արդեն լուծված է և այդ լուծումը ներկայացնում են նկարի վրա: Առաջին փուլն ավարտվում է այն ժամանակ, երբ պարզ է դառնում խնդրի լուծման եղանակը: Վերլուծությունը կառուցման խնդրի լուծման ամենաբարդ մասն է:

2. Կառուցում. այս փուլում կարկինի և քանոնի միջոցով կատարվում են բոլոր այն կառուցումները, որոնք, ի վերջո, հնարավորություն են տալիս կառուցել որոնելի երկրաչափական պատկերը: Կառուցման քայլերը հետևում են վերլուծությունից:

3. Ապացուցում. այստեղ հիմնավորվում է, որ կառուցված պատկերը բավարարում է խնդրի բոլոր պայմաններին: Դրա համար օգտագործվում են կառուցման քայլերը:

4. Հետազոտում. այստեղ հիմնականում պատասխանում են երկու հարցի: Առաջինը, արդյոք ցանկացա՞ծ սկզբնական տվյալների դեպքում խնդիրն ունի լուծում, և եթե այո, ապա քանի՞ լուծում ունի խնդիրը: Գործնականում առաջին հարցին պատասխանելու համար բավական է առանձնացնել բոլոր այն դեպքերը, երբ խնդիրը լուծում չունի: Դրա համար ուսումնասիրվում են կառուցման քայլերը և առանձնացվում այն պայմանները, որոնց դեպքում տվյալ քայլը իրագործելի չէ: Բարդությունն այն է, որ լուծում չունենալու պայմանները պետք է նկարագրվեն միայն խնդրի տվյալների միջոցով:

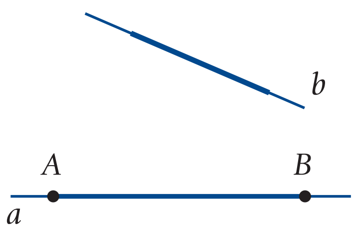
Ցուցադրենք կառուցման խնդրի լուծման ընթացքը մի քանի օրինակով:

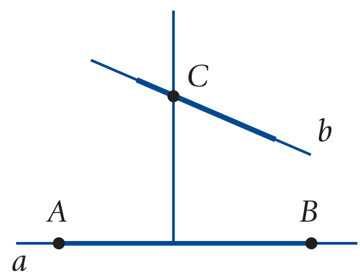
Խնդիր 1. **a** ուղղի վրա տրված է **AB** հատված: **b** ուղղի վրա կառուցել կետ, որը հավասարապես է հեռացված **AB** հատվածի ծայրակետերից:

Լուծում:

Վերլուծություն: Ենթադրենք, որ խնդիրը լուծված է, և **C**-ն **b** ուղղի որոնելի կետն է (նկ. **208**): Քանի որ **C** կետը հավասարապես է հեռացված **A** և **B** կետերից, ուստի այն դասավորված է **AB** հատվածի միջնուղղահայացի վրա: Միաժամանակ որոնելի կետը պատկանում է **b** ուղղին: Այսպիսով, **C** կետը **AB** հատվածի միջնուղղահայացի և **b** ուղղի հատման կետն է:

Կառուցում: 1. Կառուցենք **AB** հատվածի միջնուղղահայացը (խնդիր **7**): 2. կառուցենք այդ միջնուղղահայացի և **b** ուղղի հատման **C** կետը: **C** կետը որոնելին է:



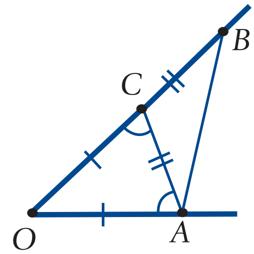


Նկ. 208

Ապացուցում: Ըստ կառուցման առաջին քայլի՝ **C** կետը դասավորված է **AB** հատվածի միջնուղղահայացի վրա և, ուրեմն հավասարապես է հեռացված այդ հատվածի ծայրակետերից: Ըստ կառուցման երկրորդ քայլի՝ **C** կետը պատկանում է նաև **b** ուղղին:

Հետազոտում: Կառուցման առաջին քայլը միշտ հնարավոր է, իսկ երկրորդը հնարավոր չէ միայն այն դեպքում, եթե **AB** հատվածի միջնուղղահայացը չի հատվում **b** ուղղի հետ: Այսպիսով, խնդիրը լուծում չունի միայն այն դեպքում, եթե **AB** հատվածն ուղղահայաց է **b** ուղղին, որը չի անցնում **AB** հատվածի միջնակետով: Եթե տրված b ուղիղն ուղղահայաց է **AB** հատվածին և անցնում է դրա միջնակետով, ապա խնդիրն ունի անթիվ բազմությամբ լուծումներ: Այդ դեպքում **b** ուղղի ցանկացած կետ բավարարում է խնդրի պայմաններին: Վերջապես, խնդիրն ունի միակ լուծում, երբ **b** ուղիղն ուղղահայաց չէ **AB** հատվածին:

Դիտարկենք կառուցման ավելի բարդ խնդրի օրինակ:



Նկ. 209

Խնդիր 2. **O** գագաթով սուր անկյան մի կողմի վրա տրված է **A** կետ: Անկյան մյուս կողմի վրա կառուցել այնպիսի **B** կետ, որ **OAB** անկյունը երեք անգամ մեծ լինի **OBA** անկյունից:

Լուծում:

Վերլուծություն: Ենթադրենք, որ խնդիրը լուծված է, և **B**-ն տրված անկյան երկրորդ կողմի որոնելի կետն է (նկ. **209**), այսինքն՝ $\angle OAB = 3\angle OBA$: **OB** ուղղի վրա կառուցենք **C** կետ, որը դասավորված է **O** և **B** կետերի միջև, ընդ որում՝ $AC \cong CB$: Դրա համար բավական է կառուցել **AB** հատվածի միջնուղղահայացի և անկյան երկրորդ կողմի հատման կետը: **ACB** կիսականոնավոր եռանկյան համար **OCA** անկյունն արտաքին անկյուն է և, հետևաբար, երկու անգամ մեծ է համընկնելի **CAB** և **CBA** անկյուններից յուրաքանչյուրից՝ $\angle OCA = 2\angle CAB = 2\angle CBA$: Պարզ է, որ $\angle OAB = \angle OAC + \angle CAB$, և քանի որ ըստ խնդրի պայմանի $\angle OAB = 3\angle OBA = 3\angle CAB$, ուստի $\angle OAC = 2\angle CAB$: Ուրեմն $\angle OAC = \angle OCA$ և հետևաբար, **OCA** եռանկյունը կիսականոնավոր եռանկյուն է՝ $OC \cong OA$: Այստեղից պարզ է, որ, ունենալով **A** կետը, կարելի է կառուցել **C** կետը և այնուհետև որոնելի **B** կետը:

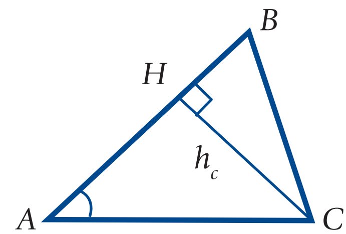
Կառուցում: 1. Կառուցենք $S^1(O, OA)$ շրջանագիծը և այդ շրջանագծի ու անկյան երկրորդ կողմի հատման **C** կետը: 2. Կառուցենք $S^1(C, CA)$ շրջանագիծը և նշանակենք **B** տառով այդ շրջանագծի և անկյան երկրորդ կողմի հատման այն կետը, որը դասավորված է **OC** հատվածից դուրս: **B** կետը որոնելին է:

Ապացուցում: Ըստ կառուցման առաջին քայլի՝ $OC \cong OA$ և, հետևաբար **OCA** եռանկյունը կիսականոնավոր եռանկյուն է՝ $\angle OAC \cong \angle OCA$: Ըստ կառուցման երկրորդ քայլի՝ $CA \cong CB$ և, ուրեմն **CAB** եռանկյունը կիսականոնավոր եռանկյուն է՝ $\Delta CAB \cong \Delta CBA$: Քանի որ **OCA** անկյունն այդ եռանկյան արտաքին անկյունն է, ուստի այն (և իրեն համընկնելի **OAC** անկյունը) երկու անգամ մեծ է **CAB** (և իրեն համընկնելի **CBA**) անկյունից: Այստեղից $\angle OAB = \angle OAC + \angle CAB = 2\angle CAB + \angle CAB = 3\angle CAB = 3\angle CBA$:

Հետազոտում: Կառուցման և՛ առաջին, և՛ երկրորդ քայլը միշտ իրագործելի են, ուստի խնդիրն ունի մեկ լուծում:

Հաճախ պահանջվում է կառուցել զանազան եռանկյուններ:

Խնդիր 3. Կառուցել **ABC** եռանկյունը, եթե տրված են ∠**A**-ն, **AB** կողմին տարված **h** բարձրությունը և **2p** պարագիծը:



Նկ. 210

Ըստ խնդրի տվյալների՝ ունենք երկու հատված, որոնցից մեկի երկարությունը հավասար է եռանկյան երեք կողմերի երկարությունների գումարին, երկրորդը՝ որոնելի **ABC** եռանկյան **C** գագաթից **BC** կողմին տարված բարձրությանը, և մեկ անկյուն, որը համընկնելի է որոնելի եռանկյան **CAB** անկյանը:

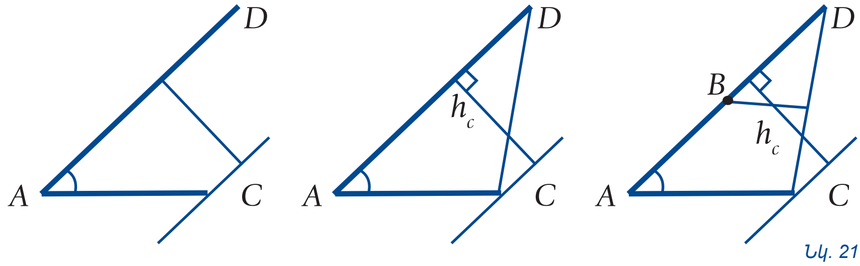
Լուծում:

Վերլուծություն: Ենթադրենք, որ խնդիրը լուծված է և **ABC**-ն որոնելի եռանկյունն է (նկ. **210**): **C** գագաթը դասավորված է տրված $\mathbf{h_c}$ հեռավորության վրա **BC** կողմը պարունակող ուղղից և, մյուս կողմից, պատկանում է **BAC** անկյան **AC** կողմին: Ուրեմն **C** կետը **AB** ուղղին զուգահեռ և դրանից $\mathbf{h_c}$ հեռավորության վրա դասավորված ուղղի և տրված **BAC** անկյան **AC** կողմի հատման կետն է: **C** գագաթի դիրքը և **AC** կողմը որոշվում են ∠**A**-ով և $\mathbf{h_c}$ բարձրությամբ: Այժմ **AB** ճառագայթի վրա **B** կետից տեղադրենք **BD = BC** հատված, կստանանք, որ **AD = 2p-AC**: Եթե հայտնի է **D** կետը, ապա **B** գագաթը կառուցվում է որպես **AD** ուղղի և **CD** հատվածի միջնուղղահայացի հատման կետ:

Կառուցում: 1. Տրված անկյան գագաթը նշանակենք **A** տառով և կողմերից մեկն անվանենք առաջին, իսկ մյուսը՝ երկրորդ:

2. Կառուցենք ուղիղ, որը զուգահեռ է անկյան առաջին կողմին և հեռացված է նրանից $\mathbf{h_c}$-ով, նշանակենք **C** տառով այդ ուղղի և անկյան երկրորդ կողմի հատման կետը:

3. Անկյան առաջին կողմի վրա **A** գագաթից տեղադրենք **AD = 2p-AC** հատված:



Նկ. 211

4. Կառուցենք **CD** հատվածի միջնուղղահայացի և **AD** ուղղի հատման կետը և այն նշանակենք **B** տառով: **ΔABC**-ն որոնելի եռանկյունն է (նկ. **211**):

<u>Ապացուցում:</u> Ըստ կառուցման առաջին քայլի՝ **BAC** անկյունը համընկնելի է տրված անկյանը: Ըստ կառուցման երկրորդ քայլի՝ **C** գագաթից **AB** ուղղին տարված բարձրությունը համընկնելի է h_c հատվածին: Ըստ կառուցման չորրորդ քայլի՝ **BD** ≅ **BC**, ուրեմն ըստ կառուցման երրորդ քայլի՝ **CA + AB + BC = CA + AB + BD = CA + (2p-AC) = 2p**:

<u>Հետազոտում:</u> Առաջին երկու քայլերը միշտ իրագործելի են: Երրորդ քայլն իրագործելի է, եթե **2p > AC**: Չորրորդ քայլն իրագործելի չէ, եթե **CD** հատվածի միջնուղղահայացը չի հատում **AD** ուղիղը: Այսպիսով, խնդիրը լուծում չունի, եթե **2p** տրված հատվածը մեծ չէ տրված **A** սուր անկյունով և **h** էջով ուղղանկյուն եռանկյան ներքնաձիգից կամ եթե **2p** թիվը հավասար է այդ ուղղանկյուն եռանկյան ներքնաձիգի և մյուս էջի երկարությունների գումարին:

Վերջին խնդիրը տարբերվում է նախորդ երկու խնդիրներից նրանով, որ անկյան գագաթը կարելի է ընտրել կամայական ձևով, այնինչ նախորդ երկու խնդիրներում տվյալները թույլ չեն տալիս նման կամայականություն: Չնայած դրան, մենք համարում ենք, որ վերջին խնդիրն ունի միակ լուծում, որովհետև որտեղ էլ կատարենք որոնելի եռանկյան կառուցումը, կստանանք զույգ առ զույգ համընկնելի եռանկյուններ:

Խնդիր **2**-ը լուծելիս, մենք կառուցեցինք միջանկյալ կետ՝ **C** կետը, որն ունենալով՝ կարողացանք զգալիորեն պարզեցնել խնդրի լուծումը: Մի կողմից, այդ **C** կետը բավարարում էր **AC** ≅ **CB**, իսկ մյուս կողմից՝ **OC** ≅ **OA** պայմանին: Այդ հանգամանքը կազմում է կառուցման խնդիրների լուծման, այսպես կոչված, **հատումների մեթոդի** հիմքը: Էությունն այն է, որ խնդրի լուծման վերլուծության փուլում կառուցում են օժանդակ կետ, որը միաժամանակ բավարարում է երկու պայմանների: Այդ պայմաններից յուրաքանչյուրը որոշում է կետերի ինչ-որ բազմություն: Կառուցելով այդ բազմությունների հատումը, ստանում են այդ կետը: Այդ մեթոդով լուծվել է, օրինակ, խնդիր **2**-ը (**C** կետը):

Խնդիր 4. Կառուցել **ABC** եռանկյունն ըստ **AC** կողմի, առընթեր և հանդիպակաց անկյունների:

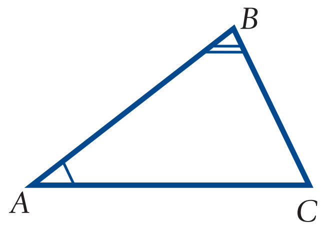
Լուծում:

<u>Վերլուծություն:</u> Ենթադրենք, որ խնդիրը լուծված է, և **ABC**-ն որոնելի եռանկյունն է (նկ. **212**): Այս խնդրում տրված են **AC** հատված և երկու անկյուն՝ ∠**A** և ∠**B**: Պարզ է, որ խնդիրը լուծելու համար բավական է կառուցել **B** գագաթը: Այդ կետը մի կողմից պատկանում է **AC** կողմով **A** անկյան երկրորդ կողմին, իսկ մյուս կողմից **CA** կողմով անկյան երկրորդ կողմին (քանի որ **∠C = 180° - ∠A - ∠B**): Այժմ պարզ է, թե ինչպես կառուցել **ABC** եռանկյունը:

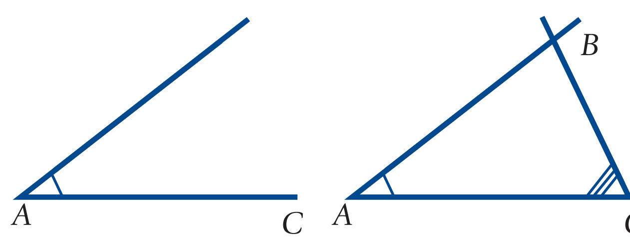
<u>Կառուցում:</u>

1. Կառուցենք **AC** կողմով անկյուն, որը համընկնելի է ∠**A**-ին:

2. Կառուցենք **CA** կողմով անկյուն, որի մեծությունն է **180° - ∠A - ∠B**: Կառուցված անկյունների երկրորդ կողմերի հատման կետը նշանակենք **B** տառով: Δ**ABC**-ն որոնելի եռանկյունն է (նկ. **213**):



Նկ. 212



Նկ. 213

Ապացուցումը և հետազոտումը առաջարկում ենք կատարել ինքնուրույն:

Հատումների մեթոդով կառուցման խնդիրներ լուծելիս գործ ենք ունենում հարթության այս կամ այն պայմանին բավարարող բազմությունների հետ: Օգտակար է վերհիշել այդպիսի բազմությունների օրինակներ:

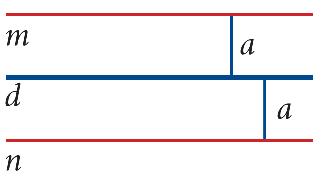
Օրինակ 1: Հարթության բոլոր այն կետերի բազմությունը, որոնք հավասարահեռ են տրված **A** և **B** կետերից, **AB** հատվածի միջնուղղահայացն է:

Օրինակ 2: Հարթության բոլոր այն կետերի բազմությունը, որոնք հավասարահեռ են տրված անկյան կողմերից, այդ անկյան կիսորդը պարունակող ուղիղն է:

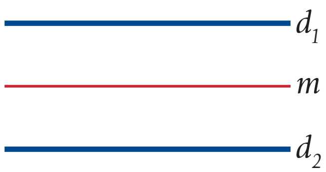
Օրինակ 3: Հարթության բոլոր այն կետերի բազմությունը, որոնք դասավորված են միևնույն **a** հեռավորության վրա տրված **d** ուղղից, այդ ուղղին զուգահեռ **m, n** երկու ուղիղների զույգն է (նկ. **214**):

Օրինակ 4: Հարթության բոլոր այն կետերի բազմությունը, որոնք հավասարահեռ են տրված $\mathbf{d_1}$ և $\mathbf{d_2}$ զուգահեռ ուղիղներից, դրանցից յուրաքանչյուրին զուգահեռ **m** ուղիղն է (նկ. **215**):

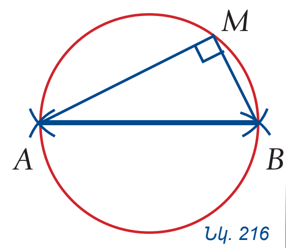
Օրինակ 5: Հարթության բոլոր այն կետերի բազմությունը, որոնցից տրված **AB** հատվածը երևում է ուղիղ անկյան տակ, **AB** տրամագծով շրջանագիծ է, որից հեռացված են **A** և **B** կետերը (նկ. **216**): Սա նշանակում է, որ եթե նշված է շրջանագծի որևէ **AB** տրամագիծ, ապա այդ շրջանագծի ցանկացած **M** կետ միացնելով այդ տրամագծի ծայրակետերին, կստանանք **AMB** ուղղանկյուն եռանկյուն: Մենք կհիմնավորենք այդ պնդումն ավելի ուշ՝ ութերորդ դասարանում:



Նկ. 214



Նկ. 215



Նկ. 216

Հարցեր և խնդիրներ

532. Նկարագրել կառուցման խնդրի լուծման ընթացքը և յուրաքանչյուր քայլի առանձնահատկությունները:

533. Ո՞ր խնդիրների լուծման դեպքում են կիրառում լուծման չորսքայլանոց ալգորիթմը:

534. Ո՞ր խնդիրներն են լուծվել հատումների մեթոդով:

535. Կառուցել կիսականոնավոր եռանկյուն՝ ըստ հիմքի և սրունքի:

536. Կառուցել կիսականոնավոր եռանկյուն՝ ըստ հիմքի և հանդիպակաց անկյան:

537. Կառուցել կիսականոնավոր եռանկյուն՝ ըստ հիմքին առընթեր անկյան և սրունքի:

538. Ապացուցել, որ ցանկացած եռանկյան համար գոյություն ունի շրջանագիծ, որն անցնում է այդ եռանկյան գագաթներով: Նկարագրել այդ շրջանագծի կառուցումը կարկինով և քանոնով:

539. Տրված անկյան գագաթում կառուցել կիսորդից տարբեր ուղիղ, որն այդ անկյան կողմերի հետ կազմում է համընկնելի անկյուններ:

540. Կառուցել ուղղանկյուն եռանկյուն՝ ըստ էջի և սուր անկյան:

541. Կառուցել ուղղանկյուն եռանկյուն՝ ըստ երկու էջերի:

542. Կառուցել ուղղանկյուն եռանկյուն՝ ըստ էջի և ներքնաձիգին տարված բարձրության:

543. Հնարավո՞ր է արդյոք կառուցել ուղղանկյուն եռանկյուն ըստ ներքնաձիգի և դրան տարված բարձրության: Պատասխանը քննարկել համադասարանցիների հետ:

544. Տրված եռանկյան մեջ կառուցել կետ, որը հավասարապես է հեռացված այդ եռանկյան կողմերից:

545. Կառուցել եռանկյունը, եթե տրված են դրա կողմերի միջնակետերը:

546. Կառուցել **ABC** եռանկյունը, եթե տրված են **c = AB**, **b = AC** կողմերը և ∠**B**-ն:

547. Կառուցել շրջանագիծ, եթե տրված են դրա կենտրոնը և շոշափողը:

548. Առանձնացնել այն խնդիրները, որոնք լուծվել են առանց հատումների մեթոդի կիրառման: Պատասխանը քննարկել համադասարանցիների հետ:

549. Նկարագրել հարթության բոլոր այն կետերի բազմությունը, որոնք դասավորված են տրված **ABC** եռանկյան կողմերն ընդգրկող ուղիղների այն կողմում, որում դասավորված է դրա միջնագծերի հատման կետը:

550. Նկարագրել հարթության բոլոր այն կետերի բազմությունը, որոնց հեռավորությունը տրված **O** կետից չի գերազանցում **r** թիվը: Պատկերել այդ երկրաչափական պատկերը (**O** կենտրոնով շառավղով շրջանը)՝ ընտրելով որևէ **O** կետ և **r = 2** սմ:

551. Օգտագործելով **Paint** ծրագիրը՝ կառուցել շրջանագիծ, այնուհետև դրա կրկնօրինակը:

IV ԳԼԽԻ ԿՐԿՆՈՒԹՅԱՆ ՀԱՐՑԵՐ

552. **O** գագաթով անկյան մի կողմի վրա գագաթից տեղադրված են զույգ առ զույգ համընկնելի հատվածներ՝ **OA**, **BA**, **BC**, **CD**: Այնուհետև **A, B, C, D** կետերով տարված են ուղղահայացներ անկյան այդ կողմին: Ապացուցել, որ այդ ուղիղները անկյան երկրորդ կողմի վրա որոշում են զույգ առ զույգ համընկնելի հատվածներ:

553. Ապացուցել նախորդ առաջադրության պնդումը, եթե **A, B, C, D** կետերով տարված են զույգ առ զույգ զուգահեռ ուղիղներ:

554. Ճշմարի՞տ է արդյոք, որ եթե եռանկյունը կառուցելի է կարկինով և քանոնով, ապա այդ խնդրին համապատասխանում է եռանկյունների համընկնելիության հայտանիշը: Պատասխանը հիմնավորել օրինակներով և քննարկել համադասարանցիների հետ:

555. Նկարագրել հարթության բոլոր այն կետերի բազմությունը, որոնք հավասարապես են հեռացված տրված եռանկյան կողմերի միջնակետերից:

556. Կառուցել շրջանագիծ, եթե տրված են դրա կետերից մեկը և կենտրոնը:

557. Կառուցել $\mathbf{S^1(O_1, r)}$ և $\mathbf{S^1(O_2, R)}$ շրջանագծերը, որոնք հատվում են տրված **A** և **B** կետերում: Ինչպե՞ս են դասավորված $\mathbf{O_1O_2}$ և **AB** ուղիղները:

558. Համեմատել հետևյալ երկու խնդիրները (տրված է երկու հատված և կետ, որը չի պատկանում այդ հատվածներին):

Կառուցել եռանկյուն՝ ըստ երկու կողմերի և միջնագծերի հատման կետի:	Կառուցել եռանկյուն՝ ըստ երկու կողմերի և երրորդ կողմի միջնակետի:

Չստա՞կ են արդյոք ձևակերպված այս խնդիրները: Քանի՞ լուծում կարող են ունենալ այս խնդիրները: Պատասխանը հիմնավորել օրինակներով և քննարկել համադասարանցիների հետ:

559. Կառուցել եռանկյուն՝ ըստ երկու կողմերի և դրանցից մեկին տարված միջնագծի:

560. Կառուցել եռանկյուն՝ ըստ երկու կողմերի և դրանցից մեկին տարված բարձրության:

561. Կառուցել եռանկյուն՝ ըստ երկու կողմերի և երրորդ կողմին տարված բարձրության:

562. **A, B, C, D** կետերից ցանկացած երեքը չեն պատկանում միևնույն ուղղի: Կառուցել շրջանագիծ, որն անցնում է **A, B** կետերով, և որի կենտրոնը հավասարապես է հեռացված **C, D** կետերից:

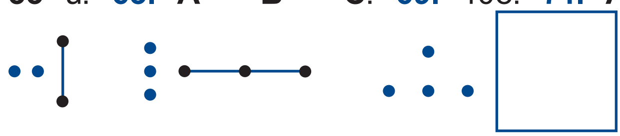
563. Նկարագրել **Paint** համակարգչային ծրագրի կիրառման առանձնահատկությունները կառուցման խնդիրներ լուծելիս:

ՊԱՏԱՍԽԱՆՆԵՐ

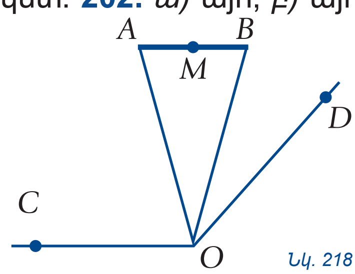
ԵՎ ՑՈՒՑՈՒՄՆԵՐ

5. **6** տարր: **11.** Չհատվող շրջանների դեպքը: **35.** Չորս: **38.** **0, 1, 2, 3**: **42.** Ոչ: **47.** *ա)* գագաթների թիվը մեկով մեծ է օղակների թվից, *բ)* գագաթների թիվը հավասար է օղակների թվին: **58.** **33** մ: **63.** **A – B – C**: **69.** 108: **74.** **A – B – C, AB ≅ BC**:

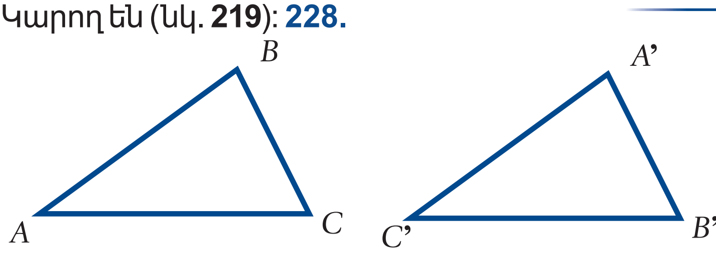
75.



83. Այո: **92.** Մեկ: **100.** Ուռուցիկությունը: **101.** Գծագրական եռանկյան միջոցով: **104.** Ոչ: **120.** **64°, 16°**: **132.** **∠1 = 63°**, **∠3 = ∠4 = 58°30.'**: **160.** *ա)* եթե ունեն նույն երկարությունը, *բ)* եթե համընկնում են: **168.** *ա)* $\frac{2}{3}a$ *բ)* $\frac{4}{5}a$: **171.** Համաչափ ուղղի նկատմամբ: **177.** **90°**: **187.** Ճշմարիտ է: **189.** «Եթե ուղիղը չի անցնում եռանկյան գագաթով և ընդգրկում է այդ եռանկյան ներքին կետ, ապա այն հատում է այդ եռանկյան երկու կողմերը»: **194.** Այո: **197.** Սուրանկյուն: **200.** **PQ = 10** սմ կամ **PQ = 6** սմ: **201.** **∠BOC = 120°**: **O** կետը կոչվում է **ABC** եռանկյան Տորիչելիի կետ: **202.** *ա)* այո, *բ)* այո, *գ)* ոչ: **205.** Կամայական եռանկյան համար գոյություն ունի կետ, որը հավասարահեռ է դրա գագաթներից: **208.** Ճշմարիտ է: **218.** Այո: **219.** Ցուցում: Կիրառել եռանկյունների համընկնելիության առաջին հայտանիշը: **222.** *ա)* ուղղանկյուն *բ)* կիսականոնավոր: **226.** Ոչ (նկ. **218**): **227.** Կարող են (նկ. **219**): **228.** Ցուցում: Ենթադրել, որ այդ եռանկյունները համընկնելի են և ստանալ հակասություն: **234.** Ցուցում: Նախ ստուգել,

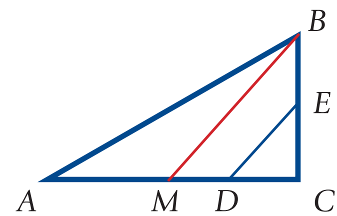


Նկ. 218



Նկ. 219

որ Δ**ABC**-ն կիսականոնավոր է: **245.** Ճշմարիտ է: **253.** **AB = 12,5** սմ, **BC = 15** սմ: **255.** Ցուցում: Նախ ապացուցել, որ եռանկյան ցանկացած միջնագծի երկարությունը փոքր է նույն գագաթից ելնող երկու կողմերի երկարությունների կիսագումարից: **262.** $\angle A = \angle B + \angle C$: **267.** Ցուցում: Նախ ապացուցել, որ **APK**, **BMP**, **CKM** եռանկյունները զույգ առ զույգ համընկնելի են: **273.** Ոչ: **276.5** սմ: **287.** Այո: **289.** **KM = 5**: **293.** Ցուցում: Կիրառել եռանկյունների համընկնելիության երկրորդ հայտանիշը: **295.** Ցուցում: Այդ կետը միացնել անկյան գագաթին և համեմատել ստացված ուղղանկյուն եռանկյունները: **296.** Ցուցում: Դիցուք $O = MC \cap NB$: Նախ ապացուցել, որ $\Delta ABN \cong \Delta AMC$, այնուհետև $\Delta OMN \cong \Delta OCB$: **298.** Ոչ: **309.** Ցուցում: Ուղղահայացը կարճ է թեքից: **311.** Ցուցում: **B** գագաթով անցնող և **AC** կողմի հետ նույն **E** մեծության անկյուն կազմող հատվածը, մեծ է **DE** հատվածից (նկ. **220**): Վերջինս փոքր է **AB** ներքնաձիգից, քանի որ **ABM** եռանկյան մեջ $\angle AMB$-ն բութ է: **312.** Ցուցում: Նախ ստուգել, որ **AB < MB**: **319.** Ուղղանկյուն եռանկյան բարձրությունները հատվում են ուղիղ անկյան գագաթում: **324.** Ոչ: **328.** **10** սմ, **10** սմ, **17** սմ: **331.** Ցուցում: Նախ ստուգել, որ **S** և **T** կետերը համապատասխանաբար **PQ** և **PR** կողմերի միջնակետերն են $PT \cong QR$: **339.** Կողմերով և անկյուններով: **341.** Այո: **342.** Ոչ: **363.** Ցուցում: Կիրառել եռանկյունների համընկնելիության երկրորդ հայտանիշը: **369.** Այո: **377.** **AB**: **391.** **120°**: **393.** $\angle 1 = 120°$, $\angle 2 = 105°$: **396.** **BCD** արտաքին անկյան կիսորդը զուգահեռ է եռանկյան **AB** կողմին: **402.** **NM = 15** սմ: **412.** Այո: **418.** Այդ հիմքին զուգահեռ ուղիղ: **420.** **M** և **B** կետերը պետք է հավասարահեռ լինեն **AC** հատվածի միջնուղղահայացից: **423.** Ցուցում: **ABC** և **CDE** կիսականոնավոր եռանկյունների **AC** և **CE** հիմքերին առընթեր անկյուններն ունեն նույն մեծությունը: **425.** Ցուցում: Պնդումը կդառնա ակնհայտ, եթե այդ իրադրությունը ցուցադրող գծագիրը պտտել **90°-ով: 429. 73°, 35°, 55°: 434. 45°: 432. 720°: 435.** $|90° - 2\angle R|$: **436.** Բութանկյուն: **437.** Ցուցում: **B** ուղիղ անկյունով **ABC** եռանկյան **BM** միջնագիծը շարունակել նույն չափով, ծայրակետը նշանակել **D** տառով և ստուգել, որ **ABD** և **BCA** ուղղանկյուն եռանկյունները համընկնելի են: Համընկնելի կլինեն նաև



Նկ. 92

այդպիսի եռանկյունների ուղիղ անկյունների գագաթներից տարված միջնագծերը: **446.** Օրինակ՝ հատողների միջոցով: **451.** Ցուցում: Այդպիսի եռանկյան ուղիղ անկյան գագաթից տարված միջնագիծն այն տրոհում է երկու եռանկյան, դրանցից մեկը կանոնավոր է: **453.** Ցուցում: Բավական է ստուգել, որ **∠ADC > ∠DAC + ∠B**: **462. 30°**: **468.** Այո: **469. 57°, 33°**: **472.** Ցուցում: Բավական է ստուգել, որ **ABC** բութանկյուն եռանկյան **BM** միջնագիծը փոքր է **MC** հատվածից: **484.** Այն ենթաբազմության համար, որում եռանկյունների համապատասխան անկյուններն ունեն նույն մեծությունը: **485.** Այո: **486.** *ա)* Այո, *բ)* ոչ: **502. 2** սմ: **503. ABC** եռանկյան կողմերի միջնուղղահայացների հատման կետը: **505.** Ոչ: **506.** Ցուցում: Նախ ստուգել, որ **ΔABC**-ն ուղղանկյուն եռանկյուն է և **AC = 2BC**: **508.** Ցուցում: Այդ միջնակետերով որոշվող հատվածը միաժամանակ **ABM** և **ACN** եռանկյունների միջին գիծն է: **509. 60°**: **522.** Ցուցում: Ընտրել այդ շրջանագծի որևէ **A, B, C** կետեր և կառուցել **AB, BC** հատվածների միջնուղղահայացների հատման կետը: **524.** Ցուցում: Որոնելի շրջանագծի կենտրոնը **AB** հատվածի միջնուղղահայացի և **d** ուղղի հատման կետն է: **527. AB** հատվածի միջնուղղահայացի վրա: **528. S^1(A,r)** շրջանագիծ: **533.** Ոչ, ուղիղը կարող է շոշափել շրջանագիծը: **534.** Ցուցում: Այդ եռանկյան երեք կողմերը տրված են: **535.** Ցուցում: Կառուցեք ուղղանկյուն եռանկյուն՝ ըստ հիմքի կեսի (*էջ*) և հանդիպակաց անկյան կեսի: **536.** Ցուցում: Դա նույնն է թե կառուցել ուղղանկյուն եռանկյուն ըստ ներքնաձիգի և սուր անկյան: **538.** Ցուցում: Այդ շրջանագծի կենտրոնը եռանկյան կողմերի միջնուղղահայացների հատման կետն է: **539.** Ցուցում: Այդ ուղիղն ուղղահայաց է անկյան կիսորդին: **544.** Ցուցում: Կառուցեք այդ եռանկյան կիսորդների հատման կետը: **546.** Ցուցում: Նախ անհրաժեշտ է կառուցել ուղղահայաց կենտրոնից շոշափողին: Դա որոշում է շրջանագծի շառավիղը: **549. ABC** եռանկյան ներքին տիրույթ (*կամ ներքնամաս*): **554.** Ոչ: Ուղղահայաց են: **559.** Ցուցում: Նախ կառուցվում է եռանկյուն՝ ըստ կողմի, միջնագծի և երկրորդ կողմի կեսի: **560.** Ցուցում: Նախ կառուցվում է ուղղանկյուն եռանկյուն՝ ըստ կողմի և բարձրության: **562.** Ցուցում: Շրջանագծի կենտրոնը համընկնում է **AB** և **CD** հատվածների միջնուղղահայացների հատման կետին:

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

ՍԱՄՎԵԼ ՔՐԻՍՏԱՓՈՐԻ ՀԱՐՈՒԹՅՈՒՆՅԱՆ

ԵՐԿՐԱՉԱՓՈՒԹՅՈՒՆ

Հանրակրթական դպրոցի
7-րդ դասարանի դասագիրք

Մասնագիտ. խմբագիր՝ Ա. Գրիգորյան
Հրատարակիչ-տնօրեն՝ Ս. Չունգուրյան
Համակարգչ. ձևավորումը՝ Ա. Մելիքսեթյանի
Սրբագրիչ՝ Տ. Նազարեթյան

Չափսը՝ 70x100 1/16: Թուղթը՝ օֆսեթ: Տպագրությունը՝ օֆսեթ:
11 տպ. մամուլ:

«ԱՍՏՂԻԿ ԳՐԱՏՈՒՆ» ՀՐԱՏԱՐԱԿՉՈՒԹՅՈՒՆ
Ք. ԵՐԵՒԱՆ, ԳԵՒՈՐԳ ՔՈՉԱՐԻ Փ. 21:
ՀԵՌ.՝ (+374 10) 52 88 00:
E-MAIL: INFO@ASTGHIKGRATUN.AM
WWW.ASTGHIKGRATUN.AM

ISBN 978-9939-74-143-7

9 789939 741437