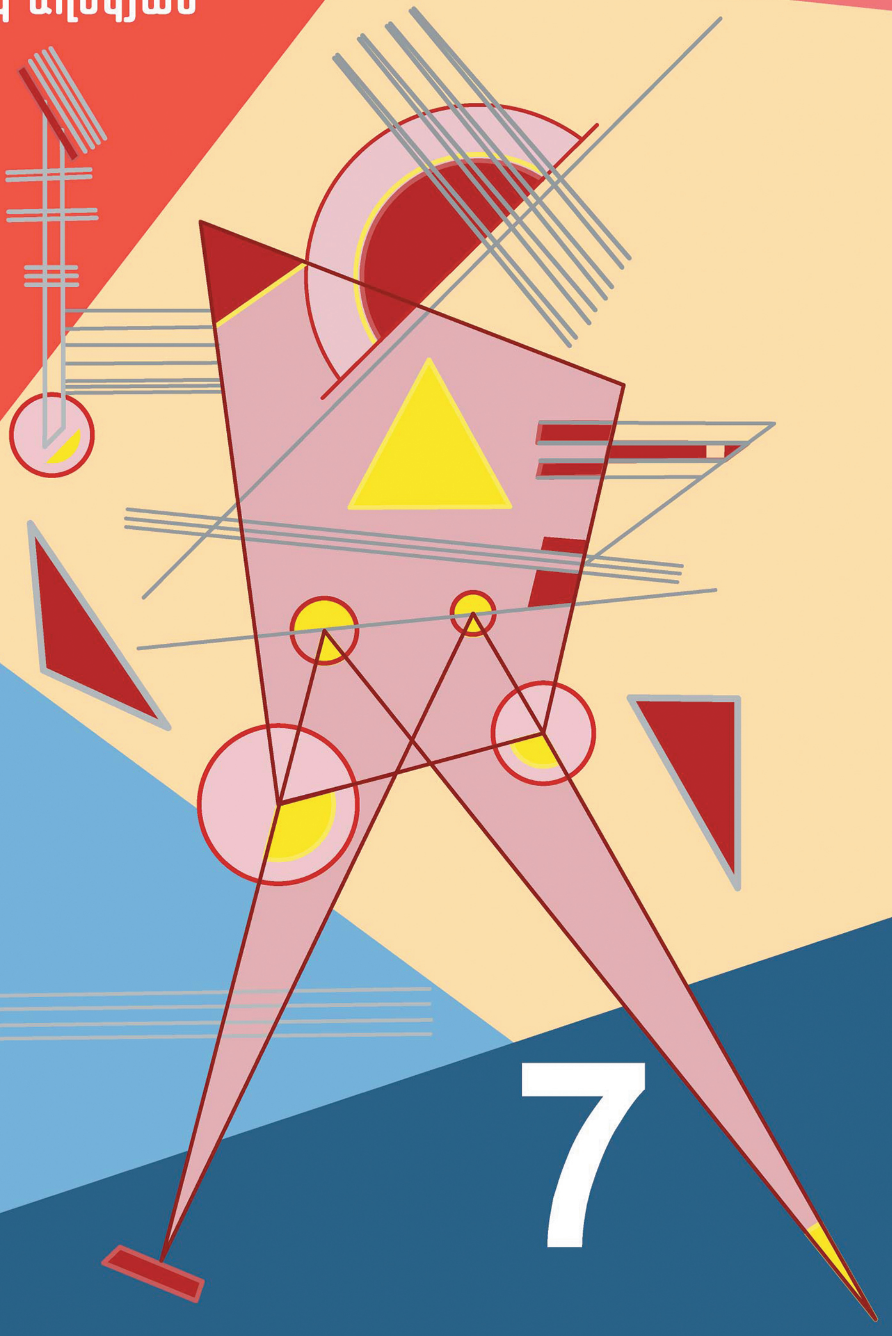
ԵՐԿՐԱՉԱՓՈՒԹՅՈՒՆ

Գագիկ Աղեկյան



7

Գագիկ Աղեկյան

ԵՐԿՐԱՉԱՓՈՒԹՅՈՒՆ

7

Երևան - 2023

ՀՏԴ 373:514(075.3)
ԳՄԴ 22.15ց72
Ա 481

*Երաշխավորված է ՀՀ կրթության, գիտության,
մշակույթի և սպորտի նախարարության կողմից*

Աղեկյան Գագրիկ
Ա 481 Երկրաչափություն 7 (7-րդ դասարանի դասագիրք) / Գ. Աղեկյան.- Եր.: Էդիթ Պրինտ, 2023.- 176 էջ:

Պայմանական նշաններ՝
Կանաչ գույնով համարակալված են առավել պարզ առաջադրանքները:
*-ով նշված են ոչ պարտադիր նյութերը:

ՀՏԴ 373:514(075.3)
ԳՄԴ 22.15ց72

ISBN 978-9939-75-989-0

Սիրելի յոթերորդ դասարանցիներ

Դուք սկսում եք ուսումնասիրել մի նոր, գեղեցիկ ու հետաքրքիր առարկա՝ երկրաչափություն:

Երկրաչափությունը ամենահին գիտություններից է: Առաջին երկրաչափական գիտելիքները մարդիկ ձեռք են բերել վաղ հնադարում: Մարդկանց պետք էր որոշել հողակտորների մակերեսները, տարբեր անոթների, ամանների տարողությունները, կառուցել ջրանցքներ ու ճանապարհներ, կամուրջներ ու շենքեր: Դեռևս չորս հազար տարի առաջ Եգիպտոսում ու Բաբելոնում կարողանում էին այդ բոլորն անել:

Էվկլիդես
(մ. թ. ա. III դար)

Մոտավորապես երկուսուկես հազար տարի առաջ հույները եգիպտացիներից և բաբելոնացիներից փոխ առան այդ երկրաչափական գիտելիքները:

Հույն գիտնականները բացահայտեցին բազմաթիվ երկրաչափական նոր օրինաչափություններ: Եվ անհրաժեշտություն առաջացավ կուտակված բազմաթիվ երկրաչափական փաստերը համակարգելու և այն գիտության վերածելու:

Այդ խնդիրը լուծեց հույն գիտնական Էվկլիդեսը: Իր «Սկզբունքներ» աշխատության մեջ նա երկրաչափական փաստերի համախումբը ներկայացրեց որպես սահմանումների և պնդումների մի կուռ համակարգ:

Երկրաչափությունը, որը ծագել էր որպես կիրառական գիտություն, հույները վերածեցին գեղեցիկ ու կատարյալ, խիստ ու հետևողական մաթեմատիկական տեսության: Ստեղծվեց երկրաչափական պատկերներն ու դրանց հատկությունները ուսումնասիրող գիտությունը՝ երկրաչափությունը:

Նայեք ձեր շուրջը: Ինչ տեսնում եք ձեր շրջապատում՝ փողոցներ, շենքեր, կամուրջներ, ճանապարհներ, մեքենաներ և ամեն բան, որ ստեղծված է մարդու ձեռքով, չէր կարող գոյություն ունենալ առանց երկրաչափական գիտելիքների: Նույնիսկ արտաքին ներդաշնակության, գեղեցկության համար այդ ամենը պարտական է երկրաչափությանը:

Մեզ շրջապատող աշխարհի առարկաները բնութագրվում են ինչ-որ հատկություններով՝ գույնով, խտությամբ, նյութի տեսակով, համով, ձևով ու չափերով և այլն: Բայց երկրաչափության համար կարևոր են միայն առարկաների ձևը, չափերն ու փոխդասավորությունը:

Օրինակ, հաղարջը, նարինջը, ձմերուկը ունեն խիստ տարբեր համեր *և գույն, բայց երկրաչափության տեսանկյունից տարբեր են միայն դրանց չափերը, իսկ ձևը նույնն է: Երեքն էլ գնդաձև են, որը բնության կատարյալ ձևերից մեկն է:*

Երկարաչափական պատկերները շրջապատող առարկաների իդեալականացված մոդելներն են:

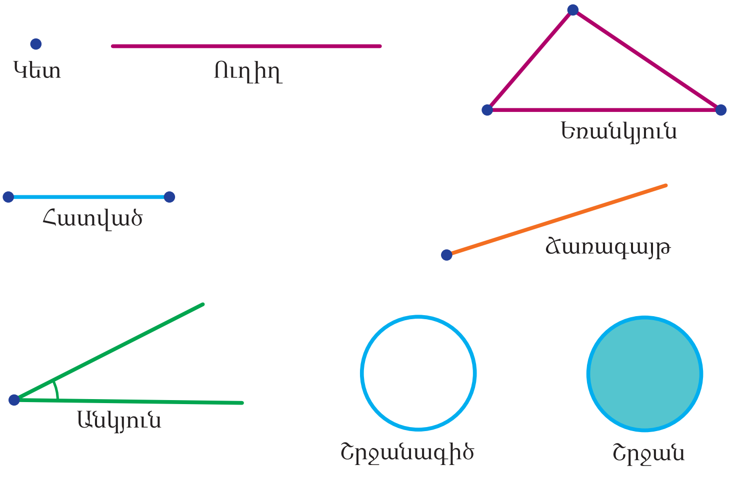
Օրինակ, երկրաչափական կետը, ուղիղը երևակայական կամ վերացական հասկացություններ են: Թղթի վրա նշված կետը, ինչքան էլ փոքր լինի, ունի որոշակի չափեր: Իսկ երկրաչափական կետը չափեր չունի, դա երևակայական կետ է: Երկրաչափական ուղիղը հաստություն չունի և երկու կողմից անվերջ է:

Իրական օբյեկտներն ուսումնասիրելու համար ուսումնասիրում են դրանց մաթեմատիկական մոդելները: Օրինակ, տակառի մոդելը կարող է լինել գլանը, իսկ երկրագնդի մոդելը՝ երկրաչափական գունդը:

Երկրաչափությունը լայնորեն կիրառվում է ճարտարագիտության, արտադրության, ճարտարապետության մեջ, համակարգչային գրաֆիկայում և շատ այլ բնագավառներում:

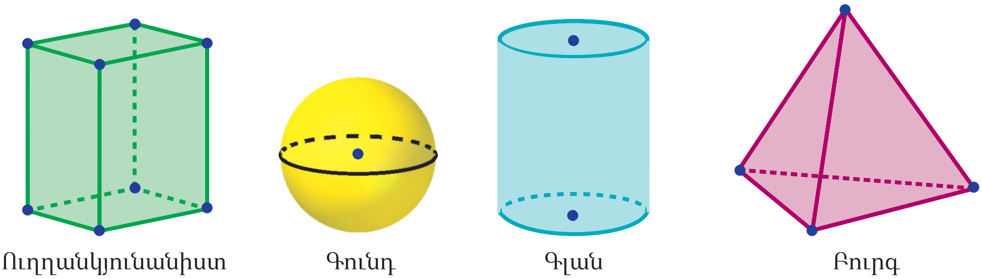
Եթե նույնիսկ ձեր ապագա մասնագիտություններում երկրաչափական գիտելիքներ չեն կիրառվելու, միևնույն է, ձեզ նույնպես երկրաչափություն սովորելը պետք է: Պետք է, քանի որ երկրաչափությունն ուղեղը մարզելու և միտքը ճկուն դարձնելու լավ միջոց է: Պետք է, քանի որ երկրաչափության մեջ լայնորեն կիրառվող ապացուցման եղանակը սովորեցնում է մարդուն հիմնավորել իր եզրահանգումները և սեփական խոսքը համոզիչ դարձնել:

Հնարավոր է, որ տարիներ հետո չհիշեք երկրաչափությունից սովորած շատ ու շատ բաներ, բայց երկրաչափություն սովորելիս ձեռք բերված ճիշտ դատողություններ և եզրահանգումներ անելու, տրամաբանական շղթաներ կառուցելու հմտությունները միշտ ձեզ հետ կլինեն:



Նկար 1

Երկրաչափության՝ հարթ պատկերների հատկություններն ուսումնասիրող բաժինը կոչվում է հարթաչափություն, իսկ տարածական պատկերների հատկություններն ուսումնասիրող բաժինը կոչվում է տարածաչափություն:



Նկար 2

Մաթեմատիկայի նախորդ տարիների դասընթացներում դուք ծանոթացել եք բազմաթիվ երկրաչափական պատկերների հետ: Դրանց մի մասը հարթ պատկեր է, ինչպես, օրինակ, կետը, ուղիղը, հատվածը, ճառագայթը, անկյունը, եռանկյունը, շրջանագիծը, շրջանը և այլն (նկ. 1): Մյուսները տարածական պատկերներ են, ինչպես, օրինակ, ուղղանկյունանիստը, գունդը, գլանը, բուրգը և այլն (նկ. 2):

7–9-րդ դասարաններում կուսումնասիրեք հարթաչափություն: Այդ ընթացքում կսովորեք մի շարք սահմանումներ ու պնդումներ, կլուծեք բազմաթիվ խնդիրներ:

Մի քանի խոսք դասագրքի կառուցվածքի և դրանից ճիշտ օգտվելու մասին:

Տեսական նյութը ներկայացված է չորս գլխով: Գլուխները բաժանված են պարագրաֆների, իսկ պարագրաֆները՝ կետերի:

Ամեն պարագրաֆից հետո կան խնդիրներ և առաջադրանքներ, որոնք բարդանում են սահուն և աստիճանաբար: Նախորդ խնդիրները հաճախ հիմք են դառնում հաջորդները լուծելու համար: Այս ամենն ապահովելու է գիտելիքների և հմտությունների սահուն աճ:

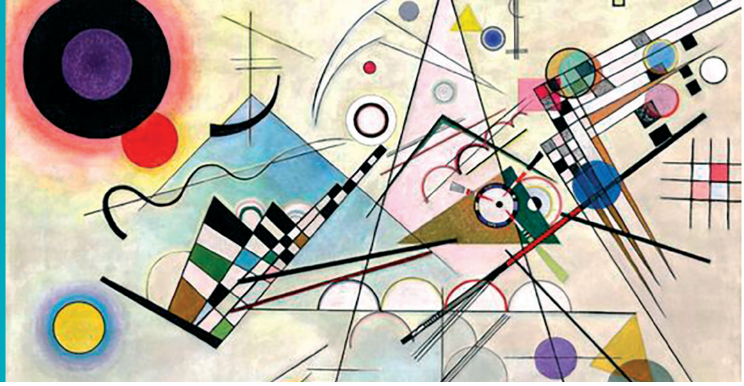
Ամեն մի գլխի վերջում, թեման կրկնելու և ամրապնդելու համար, կան լրացուցիչ խնդիրներ: Կան նաև բազմաթիվ ինտերակտիվ մոդելներ ու գործնական առաջադրանքներ:

Դասագրքի խնդիրների ճնշող մեծամասնությունն ունի պատասխան կամ ցուցում: Դժվարություններ առաջանալու դեպքում դրանք ձեզ կօգնեն ու կառաջնորդեն, բայց դրանցից պետք է օգտվել տվյալ խնդրի լուծման համար որոշակի ջանքեր գործադրելուց հետո միայն:

Տանը խնդիրներ լուծելիս քիչ դժվարություններ ունենալու համար դպրոցում ուշադիր լսեք ուսուցչին, նախապես սովորեք համապատասխան տեսական նյութը:

Հույս ունենք, որ երկրաչափություն ուսումնասիրելը հաճելի ու հետաքրքիր կլինի: Այդ գործում ձեզ կօգնեն դասագիրքը, որը ձեր ձեռքին է, և, իհարկե, ուսուցիչը:

Եղեք աշխատասեր, նպատակասլաց ու համառ, և հաջողությունը կուղեկցի ձեզ:



Գլուխ I

ԵՐԿՐԱՉԱՓԱԿԱՆ ՍԿԶԲՆԱԿԱՆ ՀԱՍԿԱՑՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

Ուսումնասիրելով այս գլուխը՝

- Կխորացնեք մաթեմատիկայի դասընթացից Ձեզ ծանոթ երկրաչափական պատկերների՝ կետի, ուղղի, ճառագայթի ու անկյան մասին գիտելիքները:
- Կիմանաք, թե որ անկյուններն են կոչվում կից, իսկ որոնք՝ հակադիր: Կսովորեք կից անկյունների, հակադիր անկյունների հատկությունները, կկիրառեք դրանք խնդիրներ լուծելիս:
- Կիմանաք, թե ինչ է թեորեմն ու դրա ապացուցումը, ինչ է աքսիոմը:
- Կանեք ապացուցման խնդիրներ լուծելու առաջին քայլերը:

§ 1. Հարթաչափության հիմնական հասկացությունները

❒ 1. Սահմանվող և հիմնական հասկացություններ

Ինչպես ամեն մի գիտության, այնպես էլ երկրաչափության հասկացությունները կարելի է բաժանել երկու խմբի՝ սահմանվող և չսահմանվող **(հիմնական)**:

Իսկ ի՞նչ է նշանակում սահմանել որևէ հասկացություն: Այս հարցին պատասխանելու համար քննարկենք պարզ թվի ձեզ ծանոթ սահմանումը.

Այն բնական թիվը, որն ունի միայն երկու բաժանարար՝ ինքը և 1-ը, կոչվում է պարզ թիվ:

Նախ նկատենք, որ բերված օրինակում ոչինչ չի պնդվում: Այս օրինակում, օգտվելով բնական թիվ, բաժանարար հասկացություններից, ասվում է, թե որ թվերն են պայմանավորվել անվանել պարզ թվեր:

Այսպիսով, կարող ենք ասել, որ սահմանել որևէ հասկացություն նշանակում է արդեն հայտնի հասկացությունների միջոցով պարզաբանել, թե այդ անվան տակ ինչ պայմանավորվածություն է թաքնված: Ուրեմն, որևէ հասկացություն սահմանելու համար օգտագործվում են այլ հասկացություններ:

Եթե ամեն մի հասկացություն սահմանելու համար օգտագործվող հասկացությունները նույնպես փորձենք սահմանել, ապա այդ շղթան վերջ չի ունենա: Հետևաբար, ինչ-որ քայլի պետք է կանգ առնել, այսինքն, ոչ բոլոր հասկացությունները կարող են սահմանվել:

Այդ պատճառով էլ ցանկացած գիտության մեջ կան չսահմանվող **(հիմնական)** հասկացություններ:

❐ 2. Կետ, ուղիղ, հարթություն

Կետ, ուղիղ, հարթություն հասկացությունները երկրաչափության հիմնական հասկացություններից են: Ուրեմն, դրանք չեն սահմանվում: Սովորաբար դրանք նկարագրվում են: Օրինակ, ուղիղը կարող ենք համեմատել հաստություն չունեցող ձգված թելի հետ, որը երկու կողմից անվերջ շարունակված է: Հարթությունը կարելի է համեմատել լճակի հանդարտ մակերևույթի հետ, որը բոլոր կողմերից անվերջ շարունակված է:

Բայց այս նկարագրությունները չեն բացահայտում այդ հասկացությունների հատկությունները: Դրանց հատկությունները ի հայտ են գալիս դրանց կամ դրանց և հետագայում սահմանվող հասկացությունների փոխհարաբերություններում:

Մասնավորապես, տեղի ունեն հետևյալ հատկությունները.

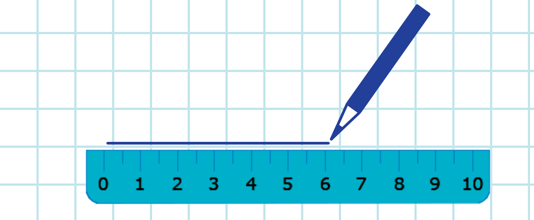
1°. Ինչպիսին էլ լինի ուղիղը, գոյություն ունեն այդ ուղղին պատկանող կետեր և այդ ուղղին չպատկանող կետեր:

2°. Ցանկացած երկու կետով անցնում է ուղիղ, ընդ որում՝ միայն մեկը:

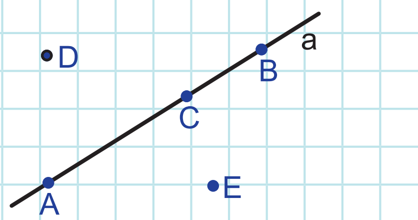
3°. Ուղղին պատկանող երեք կետերից մեկը և միայն մեկն է մյուս երկուսի միջև:

Կետերը սովորաբար նշանակում են լատինական մեծատառերով, իսկ ուղիղները՝ լատինական փոքրատառերով:

Ինչպես գիտեք, ուղիղ գծելիս օգտվում են քանոնից, և գծագրում պատկերվում է ուղղի միայն մի մասը (նկ. 3):



Նկար 3



Նկար 4

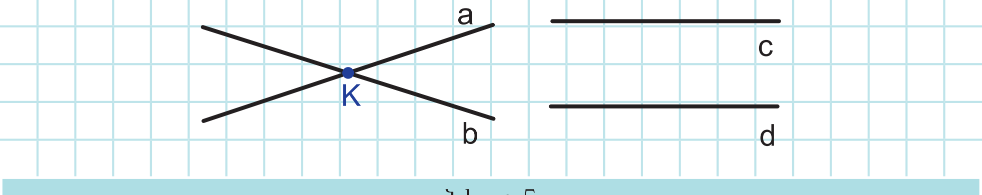
Նկար 4-ում պատկերված են a ուղիղը և A, B, C, D, E կետերը: A, B և C կետերը պատկանում են a ուղղին, ընդ որում՝ C կետը A և B կետերի միջև է: D և E կետերը չեն պատկանում a ուղղին:

Քանի որ a ուղիղը անցնում է A և B կետերով, իսկ երկու կետով անցնում է միայն մեկ ուղիղ, ապա A և B կետերը որոշում են a ուղիղը: Դա նկատի ունենալով կարող ենք a ուղիղը նշանակել նաև AB-ով կամ BA-ով:

Քննարկենք երկու ուղիղների հնարավոր փոխդասավորությունը:

Երկու ուղիղներ չեն կարող ունենալ երկու կամ ավելի ընդհանուր կետ, քանի որ դա հակասում է **2°** հատկությանը: Ուրեմն, **ուղիղները կարող են ունենալ մեկ ընդհանուր կետ կամ ընդհանուր կետ չունենալ**:

Առաջին դեպքում ասում են, որ ուղիղները հատվում են: Նկար 5-ում a և b ուղիղները հատվում են K կետում, իսկ c և d ուղիղները չեն հատվում:



Նկար 5

Հարցեր և առաջադրանքներ

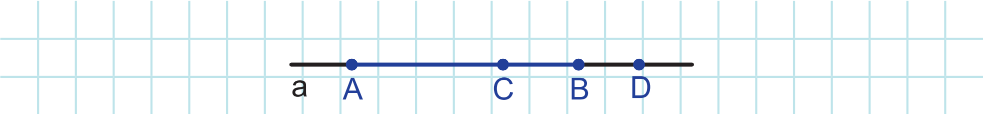
1. Ինչպե՞ս են նշանակում ա) կետերը, բ) ուղիղները:
2. Ուղիղ գծելու համար ի՞նչ են օգտագործում:
3. Գծեք ուղիղ: Նշեք A և B կետերն այնպես, որ A կետը պատկանի, իսկ B կետը չպատկանի այդ ուղղին:
4. Տրված A կետով տարեք ուղիղ: Քանի՞ այդպիսի ուղիղ կարելի է տանել:
5. Նշեք երկու կետ և դրանցով տարեք ուղիղ: Քանի՞ այդպիսի ուղիղ կարելի է տանել:
6. Գծեք a ուղիղ և դրա վրա նշեք A և B կետերը: a ուղղի վրա նշեք C կետն այնպես, որ այն գտնվի A և B կետերի միջև:
7. Գծեք a և b ուղիղներ, որոնք հատվում են C կետում: Նշեք A և D կետերն այնպես, որ A կետը պատկանի a ուղղին և չպատկանի b ուղղին, իսկ D կետը չպատկանի այդ ուղիղներից ոչ մեկին:
8. Նշեք A, B, C և D կետերն այնպես, որ A, B և C կետերը գտնվեն մի ուղղի վրա, իսկ D կետը չգտնվի այդ ուղղի վրա: Կետերի ամեն մի զույգով տարեք ուղիղ: Քանի՞ ուղիղ է ստացվում:
9. Նշեք A, B, C և D կետերն այնպես, որ դրանցից որևէ երեքը չգտնվի մի ուղղի վրա: Կետերի ամեն մի զույգով տարեք ուղիղ: Քանի՞ ուղիղ է ստացվում:
10. Գծեք զույգ առ զույգ հատվող երեք ուղիղ: Գտեք այդ ուղիղների հատման կետերի քանակը: Դիտարկեք բոլոր հնարավոր դեպքերը:

§2. Հատվածների համեմատումը, հատվածի երկարությունը

❒ 3. Հատված, հատվածների համեմատումը

Սահմանում: Ուղղի՝ երկու կետերով սահմանափակված մասը կոչվում է հատված: Հատվածը սահմանափակող կետերը կոչվում են հատվածի ծայրակետեր:

Նկար 6-ում պատկերված է a ուղղի A և B կետերով սահմանափակված մասը: Այդ հատվածը նշանակում են AB-ով կամ BA-ով:



Նկար 6

AB հատվածին են պատկանում A և B ծայրակետերը և a ուղղի բոլոր այն կետերը, որոնք A և B կետերի միջև են: Նկար 6-ում C կետը AB հատվածի վրա է, իսկ D կետը AB հատվածի վրա չէ:

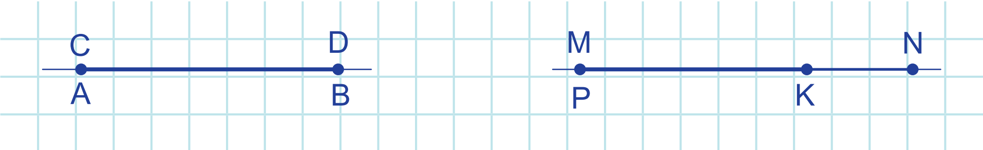
Սահմանում: Երկու երկրաչափական պատկերներ կոչվում են հավասար, եթե դրանք վերադրմամբ կարող են համընկնել:

Պետք է նկատի ունենալ, որ եթե ինչ-որ վերադրման դեպքում երկու պատկեր չեն համընկել, ապա դա չի նշանակում, որ դրանք հավասար չեն:

Հավասար պատկերների սահմանումը, մասնավորապես, վերաբերում է երկու հատվածներին:

Երկու, օրինակ, AB և CD հատվածները համեմատելու համար կվերադրենք դրանք այնպես, որ դրանց երկու ծայրակետերը, օրինակ A-ն և C-ն, համընկնեն, իսկ B և D կետերն ընկած լինեն AB ուղղի վրա՝ A կետի միևնույն կողմում: Եթե B և D ծայրակետերը նույնպես համընկնեն, ապա այդ հատվածները ամբողջությամբ կհամընկնեն: Ուրեմն, այդ հատվածները հավասար են: Իսկ եթե B և D ծայրակետերը չհամընկնեն, ապա փոքր են համարում այն հատվածը, որը մյուսի մի մասն է:

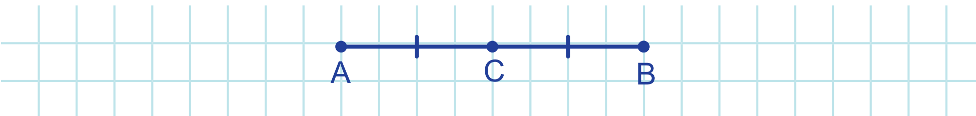
Նկար 7-ում AB և CD հատվածները համընկել են՝ $AB = CD$: Իսկ MN և PK հատվածները չեն համընկել, ընդ որում՝ PK հատվածը MN հատվածի մի մասն է: Ուրեմն, $PK < MN$:



Նկար 7

Սահմանում: Այն կետը, որը հատվածը բաժանում է երկու հավասար հատվածների, կոչվում է հատվածի միջնակետ:

Նկար 8–ում C–ն AB հատվածի միջնակետն է՝ $AC = CB$:



Նկար 8

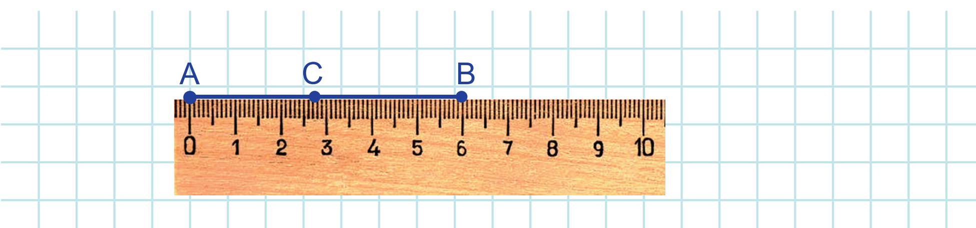
Ինտերակտիվ մոդել

Հավասար պատկերներ

❒ 4. Հատվածների չափումը

Հատվածը չափելու, այսինքն, դրա երկարությունը որոշելու համար այն համեմատում են չափման միավոր ընտրված հատվածի հետ և պարզում, թե չափման միավոր ընտրված հատվածը և դրա մասերը քանի անգամ են տեղավորվում այդ հատվածում:

Օրինակ, նկար 9–ում չափման միավոր է ընտրված սանտիմետրը: AB հատվածի երկարությունը 6 սմ է, իսկ AC հատվածինը՝ 2,7 սմ:



Նկար 9

Այսինքն, AB հատվածում սանտիմետրը տեղավորվել է ուղիղ 6 անգամ: AC հատվածում սանտիմետրը տեղավորվել է 2 անգամ, իսկ մնացած մասում սանտիմետրի $\frac{1}{10}$ մասը՝ միլիմետրը տեղավորվել է 7 անգամ:

Նշենք, որ AB հատվածի երկարությունը նույնպես նշանակում են AB–ով: Ուրեմն, կարող ենք գրել, որ $AB = 6$ սմ:

Երբ ընտրված է չափման միավորը, ապա ամեն մի հատվածի համապատասխանում է մի որոշակի դրական թիվ, որը ցույց է տալիս, թե ընտրված հատվածը և դրա մասերը քանի անգամ են տեղավորվում այդ հատվածում:

Ամեն մի հատվածի երկարություն մի որոշակի դրական թիվ է:

Հատվածի երկարությունը օժտված է հետևյալ հատկությամբ.

Եթե հատվածը իր որևէ կետով տրոհվում է երկու հատվածի, ապա ամբողջ հատվածի երկարությունը հավասար է իր մասերի երկարությունների գումարին:

Օրինակ, նկար 9–ում $AB = AC + CB = 2{,}7$ սմ $+ 3{,}3$ սմ $= 6$ սմ:

Նշենք նաև, որ **երկու կետերի հեռավորություն** են անվանում այդ կետերը միացնող հատվածի երկարությունը:

Ինտերակտիվ մոդել

Հատվածների համեմատումը

Դինամիկ մաթեմատիկա

1. Դինամիկ մաթեմատիկայի ծրագրով կառուցեք հատված: Ստեղծեք գրություն, որը ցույց է տալիս հատվածի երկարությունը: Շարժեք հատվածի ծայրակետերը և գրության միջոցով հետևեք հատվածի երկարության փոփոխությանը:
2. Դինամիկ մաթեմատիկայի ծրագրով կառուցեք ֆիքսված երկարությամբ հատված: Ստեղծեք գրություն, որը ցույց է տալիս հատվածի երկարությունը: Շարժեք հատվածի ծայրակետերն ու համոզվեք, որ հատվածի երկարությունը չի փոխվում:

3. Դինամիկ մաթեմատիկայի ծրագրով կառուցեք AB հատված և դրա C միջնակետը: Չափեք AC և CB հատվածների երկարությունները: Շարժեք A կամ B կետը: Պահպանվո՞ւմ է C կետի հատվածի միջնակետ լինելը:

4. Դինամիկ մաթեմատիկայի ծրագրով կառուցեք AB հատված և դրա վրա նշեք C կետ: Թաքցրեք AB հատվածը: Կառուցեք AC և CB հատվածները: Հաշվեք AC+CB-ն՝ մուտքագրման պատուհանում գրելով g+h:

Ստեղծեք գրություններ, որոնք ցույց են տալիս AB հատվածի երկարությունը, AC հատվածի երկարությանը գումարած CB հատվածի երկարությունը: Շարժեք C կետը և հետևեք գրություններին, արեք եզրակացություն: Կարող եք շարժել նաև A կամ B կետը:

❒ 5. Չափման միավորներ, չափիչ գործիքներ

Հատվածների, հեռավորությունների չափման համար գործնականում օգտվում են տարբեր միավորներից: Հնում տարբեր երկրներում ընդունված են եղել չափման տարբեր միավորներ: Ներկայումս որպես հատվածների չափման միջազգային միավոր ընդունված է մետրը: Այն մոտավորապես հավասար է երկրագնդի միջօրեականի $\frac{1}{40000000}$ մասին: 1983 թվականից սկսած մետրը համարվում է այն երկարությունը, որը լույսը վակուումում անցնում է $\frac{1}{299792458}$ վայրկյանում: Մետրի չափանմուշը, պատրաստված հատուկ ձողի տեսքով, պահվում է Ֆրանսիայում՝ չափերի և կշիռների միջազգային բյուրոյում: Այդ չափանմուշից մեծ ճշգրտությամբ պատճեններ են պատրաստված շատ երկրների համար:

Չափումների համար հաճախ օգտվում են մետրից 10 անգամ, 100 անգամ և 1000 անգամ փոքր միավորներից: Դրանք են համապատասխանաբար դեցիմետրը, սանտիմետրը և միլիմետրը. 1 մ = 10 դմ, 1 մ = 100 սմ, 1 մ = 1000 մմ: Օգտվում են նաև մետրից 1000 անգամ մեծ միավորից՝ կիլոմետրից:

Չափման միավորն ընտրելիս պետք է ելնել նպատակահարմարությունից: Օրինակ, աստղագիտության մեջ հեռավորությունները չափելու համար չեն օգտվում վերևում թվարկված միավորներից, այլ օգտվում են լուսատարուց, որը հավասար է մեկ տարում լույսի անցած հեռավորությանը և մոտավորապես $9,46 \cdot 10^{12}$ կմ է: Իսկ փոքր մեծություններ, օրինակ, ատոմների չափերը, հարմար է արտահայտել անգստրեմներով $(\overset{\circ}{A})$, $1\overset{\circ}{A} = 10^{-8}$ սմ $= 10^{-10}$ մ:

Հեռավորություններ չափելու գործիքները նույնպես բազմազան են: Չափիչ գործիքի ընտրությունը կախված է չափվող հեռավորության բնույթից: Օրինակ, տետրում պատկերված հատվածի երկարությունը չափելու համար հարմար է օգտվել քանոնից: Խողովակների տրամագծերը չափում են ձողակարկինով (նկ. 10ա): Տեղանքում չափումներ անելիս չափերիզ (նկ. 10բ) կամ հեռավորություն չափելու լազերային գործիք են օգտագործում (նկ. 10գ):

ա) բ) գ)

Նկար 10

Հարցեր և առաջադրանքներ

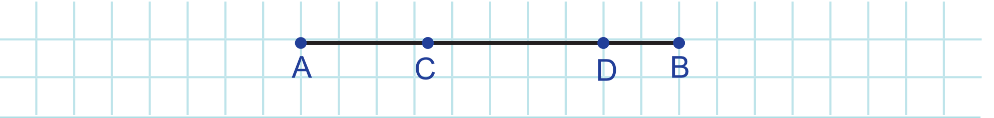
11. AB և CD ուղիղները հատվում են: Կարո՞ղ ենք պնդել, որ AB և CD հատվածները նույնպես ունեն ընդհանուր կետ:

12. Երկու հատվածներ ունեն միայն մեկ ընդհանուր ներքին կետ: Ի՞նչ կարելի է ասել այդ հատվածներն ընդգրկող ուղիղների մասին:

13. Երկու հատվածներ ունեն միայն մեկ ընդհանուր կետ, որը դրանցից ամեն մեկի ծայրակետն է: Կարո՞ղ ենք պնդել, որ այդ հատվածներն ընդգրկող ուղիղները հատվում են:

14. Քանի՞ հատվածի է բաժանվում հատվածը իր ա) երկու ներքին կետով, բ) երեք ներքին կետով:

15. Քանի՞ հատված կա նկար 11-ում:



Նկար 11

16. Գծեք երեք հատված այնպես, որ գծագրում լինի ընդամենը երեք ծայրակետ: Դիտարկեք բոլոր հնարավոր դեպքերը:

17. Երկու պատկեր վերադրմամբ համընկել են: Կարո՞ղ են դրանք հավասար չլինել:

18. Երկու պատկերներ ինչ-որ վերադրման դեպքում չեն համընկել: Կարո՞ղ են դրանք լինել հավասար:

19. O կետը AB հատվածի միջնակետն է: Հնարավո՞ր է վերադրմամբ համընկեցնել հետևյալ հատվածները. ա) AO և OB, բ) AO և AB:

20. A, B և C կետերը միևնույն ուղղի վրա են, ընդ որում՝ C կետը A և B կետերի միջև է: Համեմատեք՝ ա) AC և AB, բ) CB և AB հատվածները:

21. Քանոնով, որի վրա նշված են միայն 0, 2, 5 բաժանումները, գծեք ա) 7 սմ երկարությամբ, բ) 6 սմ երկարությամբ հատված:

22. O կետը AB հատվածի միջնակետն է: OB հատվածի երկարությունը, չափման ինչ-որ միավորով արտահայտված, a է: Ինչքա՞ն է AB հատվածի երկարությունը՝ արտահայտված չափման նույն միավորով:

23. C կետը AB հատվածի ներքին կետ է: Չափման ինչ-որ միավորով արտահայտված՝ $AC = a$, $CB = b$: Ինչքա՞ն է AB հատվածի երկարությունը՝ նույն չափման միավորով արտահայտված:

24. M կետը AB հատվածի միջնակետն է: AB-ի երկարությունը 15 սմ է: Գտեք MB հատվածի երկարությունը:

25. K կետը CD հատվածի միջնակետն է, ընդ որում՝ $CK = 12$ սմ: Գտեք CD հատվածի երկարությունը:

26. P կետը MN հատվածի կետ է, ընդ որում՝ $MP = 8$ սմ: Գտեք PN հատվածի երկարությունը, եթե $NM = 21$ սմ:

27. A, B և C կետերը միևնույն ուղղի վրա են: B կետը պատկանո՞ւմ է AC հատվածին, եթե $AC = 5$ սմ, $BC = 7$ սմ: Պատասխանը հիմնավորեք:

28. MN հատվածի վրա նշված է K կետը: Հայտնի է, որ MK և KN հատվածների երկարությունների տարբերությունը 9 սմ է, իսկ գումարը՝ 19 սմ: Գտեք MK և KN հատվածների երկարությունները:

29. a երկարությամբ հատվածը կամայական կետով տրոհված է երկու հատվածի: Գտեք այդ հատվածների միջնակետերի հեռավորությունը:

30. K կետը AB հատվածի կետ է, ընդ որում՝ $AK:KB=4:3$: Գտեք AK և KB հատվածների երկարությունները, եթե $AB=28$ սմ:

31. C կետը AB հատվածի կետ է, ընդ որում՝ $AC:CB=2:5$: Գտեք AB հատվածի երկարությունը, եթե $AC=6$ դմ:

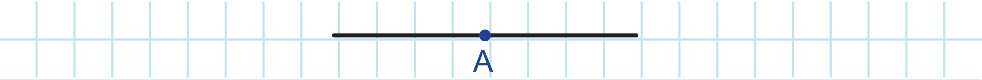
32. A, B և C կետերը միևնույն ուղղի վրա են, ընդ որում՝ $AC:CB=3:5$: Գտեք $AC:AB$ և $BC:AB$ հարաբերությունները: Դիտարկեք բոլոր հնարավոր դեպքերը:

33. B կետը AC հատվածի այնպիսի կետ է, որ $AB:BC=2:1$: D կետը AB հատվածի այնպիսի կետ է, որ $AD:DB=3:2$: D կետը ինչ հարաբերությամբ է բաժանում AC հատվածը:

§3. Անկյուն, անկյունների համեմատումը և չափումը

❒ 6. Ճառագայթ, անկյուն

Ուղղի վրա նշված կետը ուղիղը տրոհում է այդ կետով սահմանափակված երկու մասի: Օրինակ, նկար 12-ում A կետը a ուղիղը տրոհել է երկու մասի:

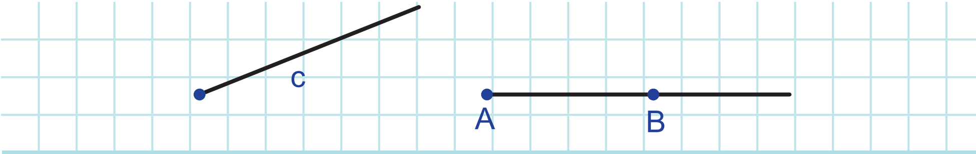


Նկար 12

Սահմանում: Ուղղի՝ մեկ կետով սահմանափակված մասը այդ կետի հետ միասին կոչվում է ճառագայթ: Ճառագայթը սահմանափակող կետը կոչվում է ճառագայթի սկզբնակետ:

Ճառագայթները սովորաբար նշանակում են լատինական փոքրատառերով կամ լատինական երկու մեծատառով: Ընդ որում՝ երկու մեծատառով նշանակելու դեպքում առաջին տառը նշանակում է ճառագայթի սկզբնակետը, իսկ երկրորդը՝ ճառագայթի որևէ այլ կետ:

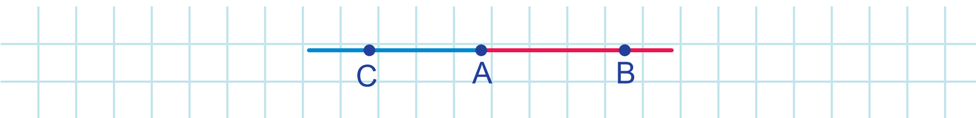
Նկար 13-ի ճառագայթներից մեկը նշանակված է c-ով, իսկ մյուսը՝ AB-ով:



Նկար 13

Սահմանում: Ուղղի՝ ընդհանուր գագաթ ունեցող ճառագայթները կոչվում են փոխլրացնող:

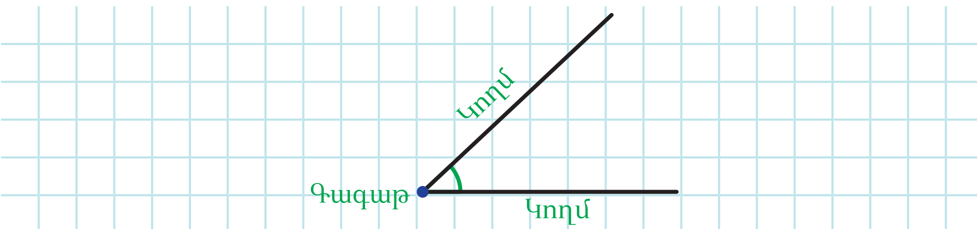
Նկար 14-ում AB և AC ճառագայթները փոխլրացնող են: Ուղղի ցանկացած կետ ուղիղը բաժանում է փոխլրացնող ճառագայթների:



Նկար 14

Սահմանում: Նույն սկզբնակետն ունեցող երկու ճառագայթներով ու դրանցով սահմանափակված հարթության մասով կազմված երկրաչափական պատկերը կոչվում է անկյուն: Այդ ճառագայթները կոչվում են անկյան կողմեր, իսկ դրանց ընդհանուր սկզբնակետը՝ անկյան գագաթ:

Նկար 15-ում նշված են տրված անկյան գագաթն ու կողմերը:

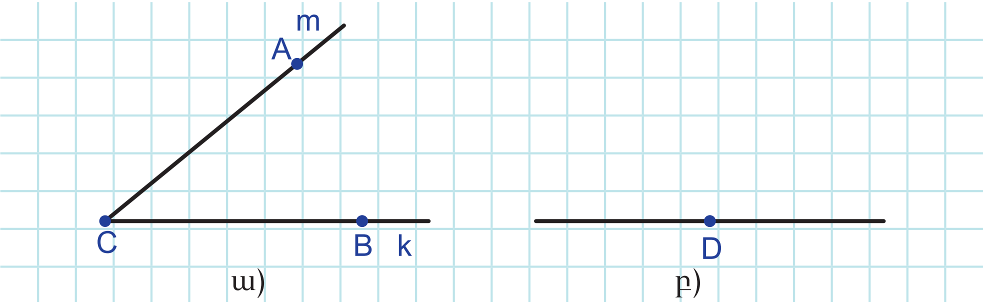


Նկար 15

Անկյունը նշանակում են կամ իր կողմերի ճառագայթների անուններով, օրինակ, $\angle mk$ կամ իր գագաթի անունով, օրինակ, $\angle C$, կամ երեք կետերի անուններով, որոնցից առաջինն ու երրորդը այդ անկյան կողմերի վրա են, իսկ երկրորդը անկյան գագաթն է, օրինակ, $\angle ACB$ (նկ. 16ա):

Անկյան կողմերը կարող են լինել նաև փոխլրացնող ճառագայթներ (նկ. 16բ):

Սահմանում: Փոխլրացնող կողմերով անկյունը կոչվում է փռված անկյուն:



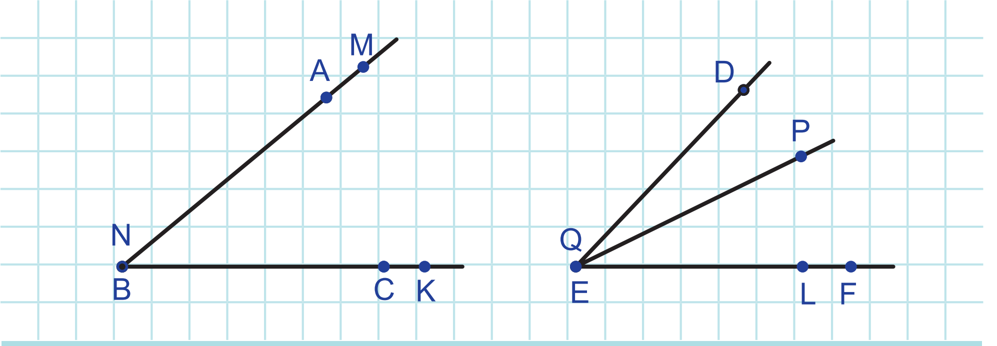
Նկար 16

❐ 7. Անկյունների համեմատումը

Հիշենք, որ երկու պատկեր, մասնավորապես, երկու անկյուն կոչվում են հավասար, եթե դրանք վերադրումով կարող են համընկնել: Ուրեմն, երկու, օրինակ, ABC և MNK չփռված անկյունները համեմատելու համար կվերադրենք այդ անկյուններն այնպես, որ, օրինակ, BC և NK ճառագայթները համընկնեն, իսկ BA և NM ճառագայթները ընկած լինեն BC ուղղի միևնույն կողմում:

Եթե BA և NM կողմերը նույնպես համընկնեն, ապա այդ անկյուններն ամբողջությամբ կհամընկնեն, ինչն էլ կնշանակի, որ այդ անկյունները հավասար են: Իսկ եթե այդ կողմերը չհամընկնեն, ապա փոքր կհամարվի այն անկյունը, որը մյուսի մի մասն է:

Նկար 17-ում ABC և MNK անկյունները համընկել են, ուրեմն, $\angle ABC = \angle MNK$, իսկ DEF և PQL անկյունները չեն համընկել, ընդ որում՝ PQL անկյունը DEF անկյան մի մասն է: Ուրեմն, $\angle PQL < \angle DEF$:

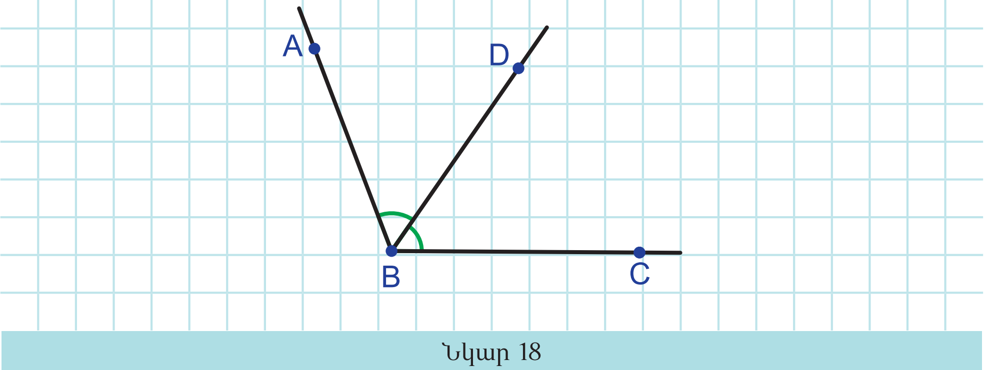


Նկար 17

Ակնհայտ է, որ փռված անկյունը մեծ է չփռված անկյունից, իսկ ցանկացած երկու փռված անկյուն հավասար են:

Սահմանում: Անկյան գագաթում սկզբնակետ ունեցող և անկյունը երկու հավասար անկյան տրոհող ճառագայթը կոչվում է անկյան կիսորդ:

Նկար 18–ում BD ճառագայթը ABC անկյան կիսորդն է:



Նկար 18

Ինտերակտիվ մոդել

Անկյունների համեմատումը

❒ 8. Անկյունների չափումը

Անկյան մեծությունը չափում են նույն սկզբունքով ինչ սկզբունքով որ չափում են հատվածի երկարությունը, այսինքն, անկյան մեծությունը չափելու համար այն համեմատում են չափման միավոր ընտրված անկյան հետ և պարզում, թե չափման միավոր ընտրված անկյունը և դրա մասերը քանի անգամ են տեղավորվում այդ անկյան մեջ:

Երբ ընտրված է չափման միավորը, ապա ամեն մի անկյան համապատասխանում է մի դրական թիվ, որը ցույց է տալիս, թե ընտրված միավորը և դրա մասերը քանի անգամ են տեղավորվում այդ անկյան մեջ:

Ամեն մի անկյան մեծություն մի որոշակի դրական թիվ է:

Անկյան մեծությունն օժտված է հետևյալ հատկությամբ.

Եթե ճառագայթն անկյունը բաժանում է երկու անկյան, ապա ամբողջ անկյան մեծությունը հավասար է իր մասերի մեծությունների գումարին:

Դինամիկ մաթեմատիկա

1. Դինամիկ մաթեմատիկայի ծրագրով կառուցեք BAC անկյուն, չափեք դրա մեծությունը: Թաքցրեք անկյան մեծությունը և ստեղծեք գրություն, որը ցույց է տալիս անկյան մեծությունը: Շարժեք B և C կետերը և հետևեք անկյան մեծության փոփոխությանը գրության միջոցով:
2. Դինամիկ մաթեմատիկայի ծրագրով կառուցեք BAC անկյուն և դրա AD կիսորդը: Չափեք BAD և DAC անկյունները: Շարժեք B կամ C կետը: Պահպանվո՞ւմ է AD-ի անկյան կիսորդ լինելը:
3. Դինամիկ մաթեմատիկայի ծրագրով կառուցեք BAC անկյուն և այն AD ճառագայթով բաժանեք երկու անկյան: Չափեք BAC, BAD, DAC անկյունների մեծությունները: Թաքցրեք դրանք:

Հաշվեք $\angle BAD + \angle DAC$-ն՝ մուտքագրման պատուհանում գրելով $\beta + \gamma$: Սիմվոլներ մուտքագրելու համար օգտվեք մուտքագրման պատուհանի α-ի նշանով կոճակից:
Ստեղծեք գրություններ, որոնք ցույց են տալիս BAC անկյան մեծությունը, BAD անկյան մեծությանը գումարած DAC անկյան մեծությունը: Շարժեք D կետը և հետևեք գրություններին, արեք եզրակացություն: Կարող եք շարժել նաև B կամ C կետը:

❐ 9. Չափման միավորներ, չափիչ գործիքներ

Սովորաբար որպես անկյունների չափման միավոր ընտրում են աստիճանը՝ այն անկյունը, որը հավասար է փռված անկյան $\frac{1}{180}$ մասին:

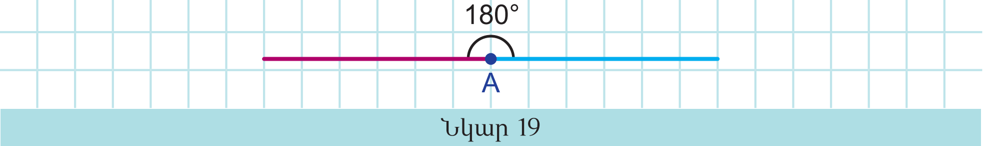
Սահմանում: Փռված անկյան $\frac{1}{180}$ մասին հավասար անկյունը կոչվում է աստիճան $(^{\circ})$**:**

Անկյունների չափման այս միավորից օգտվում են շատ վաղուց:

Այն դրական թիվը, որը ցույց է տալիս, թե աստիճանը և դրա մասերը քանի անգամ են տեղավորվում տրված անկյան մեջ, կոչվում է **անկյան աստիճանային չափ**:

Աստիճանի սահմանումից հետևում է, որ փռված անկյան մեջ այդ միավորը կտեղավորվի 180 անգամ: Հետևաբար.

Փռված անկյան մեծությունը 180° **է:**



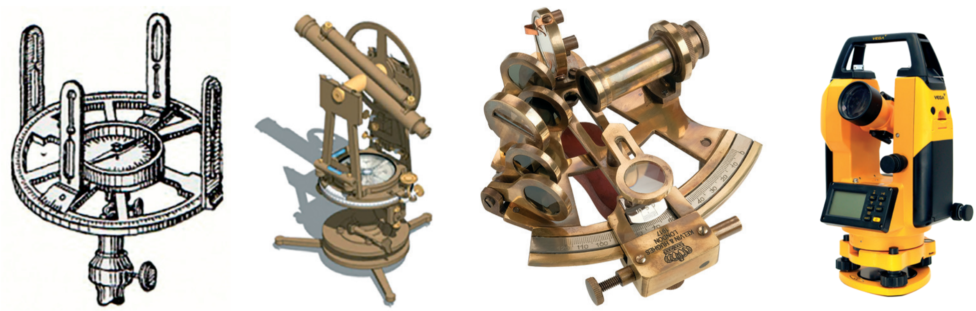
Նկար 19

Սահմանում: Աստիճանի $\frac{1}{60}$ մասը կոչվում է րոպե $(\,'\,)$, իսկ րոպեի $\frac{1}{60}$ մասը՝ վայրկյան $(\,''\,)$:

$$1^{\circ} = 60', \quad 1' = 60'':$$

Անկյունները չափելու համար օգտվում են տարբեր գործիքներից: Տետրում պատկերված անկյունը չափելու համար օգտվում են անկյունաչափից:

Տեղանքում անկյունները չափելու համար հնում օգտագործում էին աստրոլաբ: Հետագայում դրանք փոխարինվեցին թեոդոլիտով և սեքստանտով: Ներկայումս օգտվում են էլեկտրոնային թեոդոլիտից (նկ. 20), որն ապահովում է չափումների 2–5 վայրկյանի ճշգրտություն:



Աստրոլաբ Թեոդոլիտ Սեքստանտ Էլեկտրոնային թեոդոլիտ

Նկար 20

Հարցեր և առաջադրանքներ

34. Ի՞նչ տարբերություն կա հատվածի և ճառագայթի միջև: Իսկ ի՞նչ ընդհանրություն ունեն դրանք:

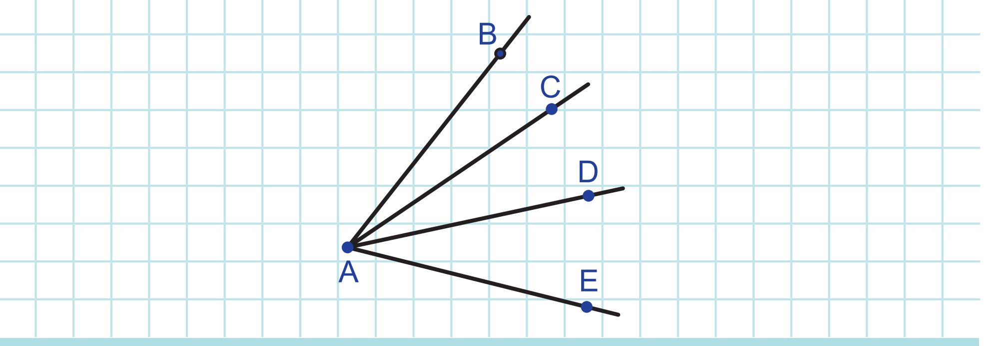
35. Ուղղի վրա նշված է երկու կետ: Այդ կետերում սկզբնակետ ունեցող քանի՞ ճառագայթ է առաջացել:

36. Գծեք երկու անկյուն, որոնք ունեն ընդհանուր գագաթ:

37. Գծեք երկու անկյուն, որոնցից ամեն մեկի գագաթը մյուսի կողմի վրա է:

38. Գծեք երկու անկյուն, որոնք ունեն ընդհանուր կողմ: Կարո՞ղ են դրանց գագաթները լինել տարբեր:

39. Քանի՞ անկյուն կա նկար 21-ում: Թվարկեք դրանք:



Նկար 21

40. Գծեք չփռված անկյուն: Տարեք դրա կիսորդը:

41. Գծեք փռված անկյուն: Տարեք դրա կիսորդը:

42. BD ճառագայթը ABC անկյան կիսորդն է: Կարելի՞ է վերադրմամբ համընկեցնել հետևյալ անկյունները ա) ABD և DBC, բ) DBC և ABC:

43. NP ճառագայթը MNK անկյունը բաժանում է երկու անկյան: Համեմատեք ա) MNP և MNK, բ) PNK և MNK անկյունները:

44. Ինչքա՞ն է փռված անկյան աստիճանային մեծությունը:

45. Փռված անկյան ո՞ր մասն է կազմում 5°-ի անկյունը:

46. Փռված անկյունից քանի՞ անգամ է փոքր 20°-ի անկյունը:

47. Արտահայտեք րոպեներով.

ա) 6°, բ) $10^\circ 12'$, գ) $15''$, դ) $18^\circ 7'$:

48. Արտահայտեք աստիճաններով.

ա) $126'$, բ) $10^\circ 12'$, գ) $37^\circ 30'$, դ) $180'$:

49. Գտեք ABC անկյունը, եթե BD ճառագայթը այդ անկյան կիսորդն է և $\angle ABD = 25^\circ 34''$:

50. $\angle ABC = 65^\circ$, BK-ն այդ անկյան կիսորդն է: Գտեք ABK և KBC անկյունները:

51. BD ճառագայթը ABC անկյան կիսորդն է, իսկ BE ճառագայթը՝ DBC անկյան: Գտեք DBC, ABC, ABE անկյունները, եթե $\angle EBC = 13^\circ 24'$:

52. BD ճառագայթը ABC անկյունը բաժանում է երկու անկյան, որոնցից մեկը 17°-ով մեծ է մյուսից: Գտեք այդ անկյունները, եթե $\angle ABC = 77^\circ$:

53. BD ճառագայթը ABC անկյունը բաժանում է երկու անկյան, որոնցից մեկը 23°-ով փոքր է մյուսից: Գտեք այդ անկյունները, եթե $\angle ABC = 155^\circ$:

54. OC ճառագայթը AOB անկյունը բաժանում է երկու անկյան, որոնցից մեկը երեք անգամ փոքր է մյուսից: Գտեք այդ անկյունները, եթե $\angle AOB = 120^\circ$:

55. ABC անկյունը BD և BE ճառագայթներով բաժանված է երեք անկյան, ընդ որում՝ $\angle ABD : \angle DBE : \angle EBC = 1:3:4$: Գտեք ABD, DBE և EBC անկյունները, եթե $\angle ABC = 160^\circ$:

56. Փռված անկյան գագաթից տարված է երկու ճառագայթ, որոնք այն բաժանում են երեք անկյան: Դրանցից առաջինը փռված անկյան $\frac{1}{5}$ մասն է, երկրորդը՝ $\frac{2}{3}$ մասը: Գտեք առաջացած երեք անկյունների մեծությունները:

57. ABC անկյունը BD և BE ճառագայթներով բաժանված է երեք անկյան, ընդ որում՝ $\angle ABD : \angle DBE : \angle EBC = 2:3:5$: Գտեք ABD, DBE, EBC, ABE, DBC անկյունները, եթե $\angle ABC = 170^\circ$:

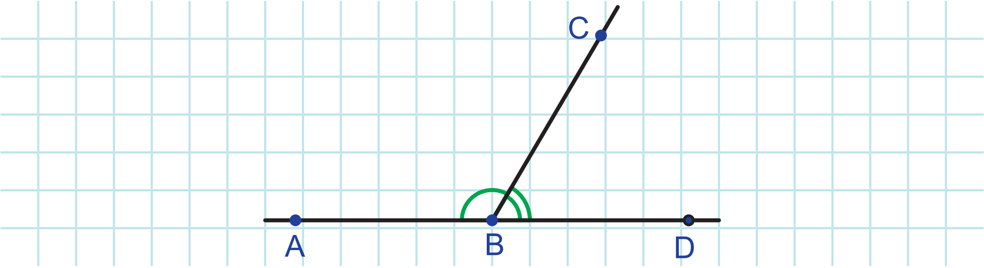
Թղթից կտրեք անկյուն: Թուղթը ծալելով ստացեք դրանից երկու անգամ փոքր անկյուն:

§4. Կից և հակադիր անկյուններ, ուղղահայաց ուղիղներ

❒ 10. Կից և հակադիր անկյուններ

Սահմանում: Երկու անկյուններ, որոնց մի կողմն ընդհանուր է, իսկ մյուս երկու կողմերը փոխլրացնող ճառագայթներ են, կոչվում են կից անկյուններ:

Նկար 22-ում ABC և CBD անկյունները կից անկյուններ են:



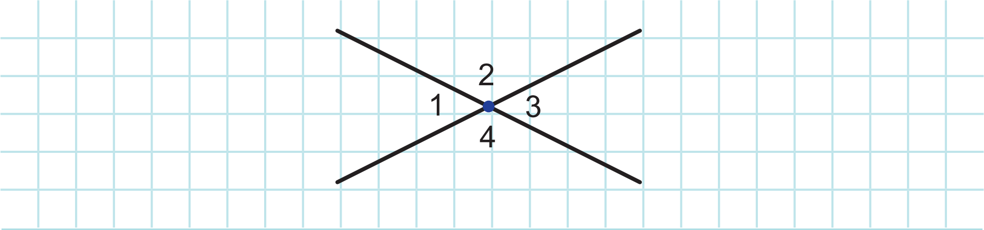
Նկար 22

Քանի որ այդ անկյունների BD և BA կողմերը փոխլրացնող ճառագայթներ են, ապա ABD անկյունը փռված անկյուն է: Հետևաբար, $\angle ABC + \angle CBD = 180^\circ$: Այսպիսով.

Կից անկյունների գումարը 180° է:

Սահմանում: Երկու անկյուններ, որոնց կողմերը փոխլրացնող ճառագայթներ են, կոչվում են հակադիր անկյուններ:

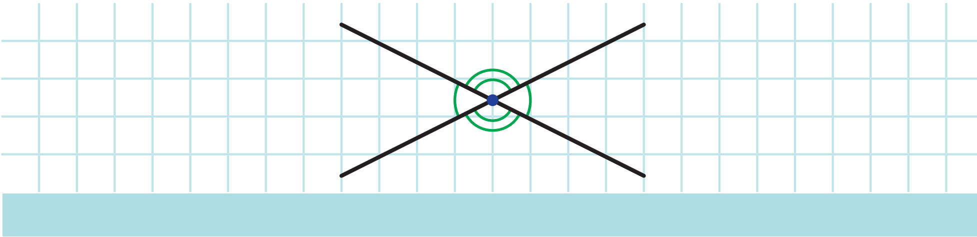
Նկար 23-ում կա հակադիր անկյունների երկու զույգ՝ $\angle 1$ և $\angle 3$, $\angle 2$ և $\angle 4$:



Նկար 23

Քանի որ $\angle 2$-ը կից է և՛ $\angle 1$-ին, և՛ $\angle 3$-ին, ապա, ըստ կից անկյունների հատկության, $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$, $\angle 3 + \angle 2 = 180^\circ$: Հետևաբար, $\angle 1 = 180^\circ - \angle 2$, $\angle 3 = 180^\circ - \angle 2$: Ուրեմն՝ $\angle 1 = \angle 3$: Այսպիսով.

Հակադիր անկյունները հավասար են:



❒ 11. Թեորեմներ և աքսիոմներ

Հակադիր անկյունների հավասարության մասին պնդումը մենք հիմնավորեցինք տրամաբանական դատողություններով: Այդպիսի պնդումը կոչվում է **թեորեմ**, իսկ դա հիմնավորելու ընթացքը՝ **թեորեմի ապացուցում**:

Ապացուցվել է նաև կից անկյունների գումարի մասին պնդումը: Իսկ, կետ 2-ի **1°**, **2°**, **3°** պնդումներն ընդունվել են առանց ապացուցման: Առանց ապացուցման ընդունվող պնդումները կոչվում են **աքսիոմներ**: Երկրաչափության աքսիոմները վերևում նշվածներով չեն ավարտվում:

Ինչո՞ւ կա պնդումների երկու տեսակ՝ թեորեմներ և աքսիոմներ:

Բանն այն է, որ անհնար է ապացուցել բոլոր պնդումները: Անհնար է, քանի որ որևէ պնդում ապացուցելու համար հենվում են այլ պնդումների վրա: Եվ եթե ամեն մի պնդում ապացուցելու համար հիմք հանդիսացող պնդումները նույնպես փորձենք ապացուցել, ապա այդ շղթան վերջ չի ունենա: Հետևաբար, ինչ-որ պնդումներ պետք է ընդունվեն առանց ապացուցման:

Այսպիսով, հիմնական հասկացությունները և աքսիոմներն այն հիմքն են, որի վրա կառուցվում է երկրաչափությունը:

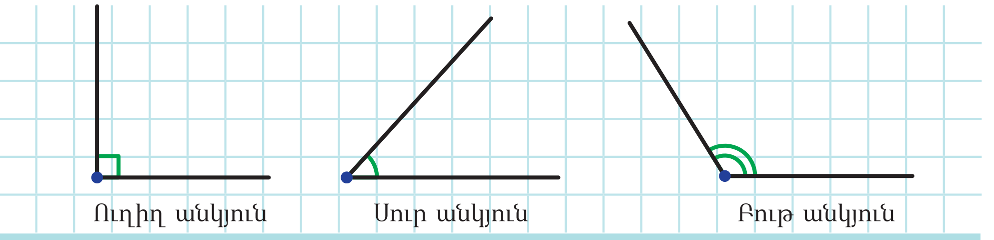
Հետագայում կտեսնեք, որ, փոխելով աքսիոմներից ընդամենը մեկը, կարելի է կառուցել այլ՝ ոչ էվկլիդեսյան երկրաչափություն:

Աքսիոմների համակարգին ներկայացվող պահանջները, ինչպես նաև երկրաչափության աքսիոմների համակարգը ներկայացված են հարթաչափության դասընթացի հավելվածում:

❒ 12. Անկյունների դասակարգումը, ուղղահայաց ուղիղներ

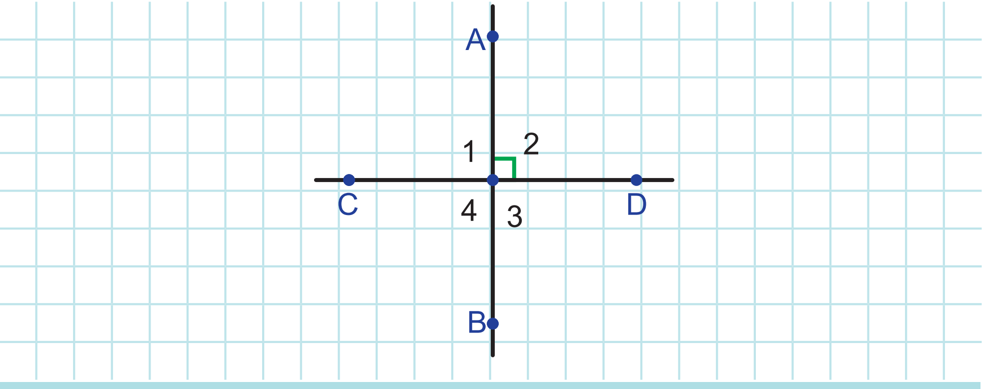
Սահմանում: Անկյունը, որի մեծությունը հավասար է 90°–ի, կոչվում է ուղիղ անկյուն:
Ուղիղ անկյունից փոքր անկյունը կոչվում է սուր անկյուն:
Ուղիղ անկյունից մեծ, բայց փռված անկյունից փոքր անկյունը կոչվում է բութ անկյուն:

Նկար 24–ում պատկերված են ուղիղ, սուր և բութ անկյուններ:



Նկար 24

Դիտարկենք երկու հատվող ուղիղ: Դրանց հատումից առաջանում է չորս չփռված անկյուն (նկ.25):



Նկար 25

Եթե այդ անկյուններից մեկն ուղիղ է, օրինակ, անկյուն $\angle 2$–ը, ապա մյուսները նույնպես ուղիղ են: Իրոք, $\angle 1$–ը և $\angle 3$–ը $\angle 2$–ին կից անկյուններ են: Հետևաբար, դրանք երկուսն էլ հավասար են $180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$: $\angle 4$–ը և $\angle 2$–ը հակադիր անկյուններ են: Ուրեմն, $\angle 4 = \angle 2 = 90^\circ$:

Սահմանում: Երկու հատվող ուղիղներ, որոնց հատումից առաջանում է չորս ուղիղ անկյուն, կոչվում են ուղղահայաց (կամ փոխուղղահայաց) ուղիղներ:

AB և CD ուղիղների ուղղահայացությունը գրվում է այսպես. $AB \perp CD$:

Ինտերակտիվ մոդել

Անկյունների դասակարգումը

Հարցեր և խնդիրներ

58. ABC և CBD անկյունները կից են: Կարո՞ղ են A, B և D կետերը չգտնվել մի ուղղի վրա:

59. ABC և CBD անկյունները կից են: Ինչպիսի՞ն է ABD անկյունը:

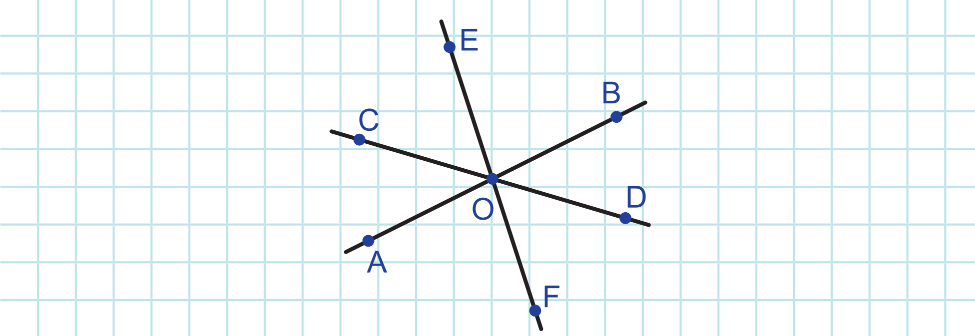
60. MNK և KNP անկյունները կից են և $\angle MNK = 17°26'$: Գտեք KNP անկյունը:

61. Կից անկյուններից մեկը $30°$-ով մեծ է մյուսից: Գտեք այդ անկյունները:

62. Կից անկյուններից մեկը 5 անգամ փոքր է մյուսից: Գտեք այդ անկյունները:

63. ABC և CBD անկյունները կից են: BK-ն CBD անկյան կիսորդն է և $\angle KBD = 18°$: Գտեք $\angle ABC$-ն:

64. Նկար 26-ում չփռված հակադիր անկյունների քանի՞ զույգ կա:



Նկար 26

65. ABC և DBE անկյունները հակադիր են: Էլ որ չփռված անկյուններն են հակադիր: Ո՞ր անկյուններն են փռված:

66. ABC և MBN անկյունները հակադիր են: Էլ որ չփռված անկյուններն են հակադիր: Ո՞ր անկյուններն են կից:

67. Հակադիր անկյունների գումարը $68^{\circ}36'$ է: Գտեք այդ անկյունները:

68. Կից անկյուններից մեկը սուր է: Ինչպիսի՞ն է մյուս անկյունը:

69. Երկու անկյունների գումարը 180° է: Կարո՞ղ ենք պնդել, որ դրանք կից անկյուններ են:

70. Երկու անկյուններից մեկը սուր է, մյուսը՝ բութ: Կարո՞ղ են այդ անկյունները լինել ա) հակադիր, բ) կից:

71. Գտեք երկու ուղղի հատումից առաջացած չփռված անկյունները, եթե. ա) դրանցից երկուսի տարբերությունը 20° է, բ) դրանցից երեքի գումարը 240° է:

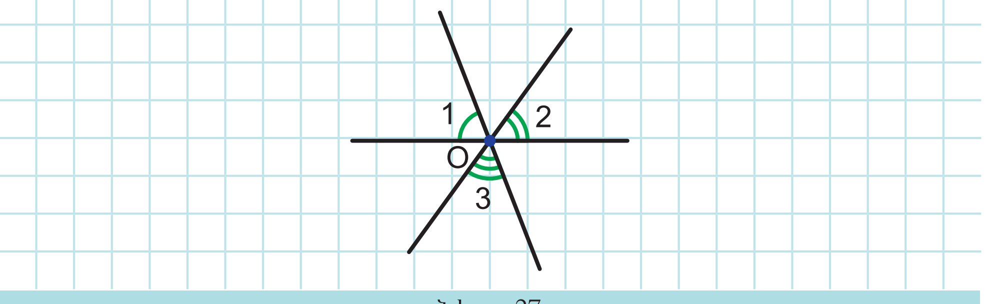
72. Տրված անկյունը բաժանված է երկու անկյան և տարված են այդ անկյունների կիսորդները: Այդ կիսորդների կազմած անկյունը հավասար է տրված անկյանը կից անկյանը: Գտեք տրված անկյունը:

73. Երկու ուղիղների հատմամբ առաջացած անկյուններից մեկն ուղիղ է: Ապացուցեք, որ այդ ուղիղներն ուղղահայաց են:

74. Երկու ուղիղների հատմամբ առաջացած հակադիր անկյունների գումարը 180° է: Ապացուցեք, որ այդ ուղիղներն ուղղահայաց են:

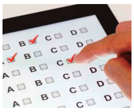
75. Երկու ուղիղների հատմամբ առաջացած կից անկյունները հավասար են: Ապացուցեք, որ այդ ուղիղներն ուղղահայաց են:

76. Նկար 27-ում երեք ուղիղ հատվել են O կետում: Ապացուցեք, որ $\angle 1+\angle 2+\angle 3=180^{\circ}$:



Նկար 27

Անկանոն եզրեր ունեցող թուղթը ծալելով ստացեք փոխուղղահայաց հատվածներ:



Համակարգչային թեմատիկ թեստ

Ներբեռնման հղումը՝ https://mathnet.am/etest/7-1.zip

Լրացուցիչ հարցեր և խնդիրներ

77. Ճի՞շտ է պնդումը, որ հազար հատ հատվածից կարելի է կազմել՝ ա) հատված, բ) ճառագայթ, գ) ուղիղ:

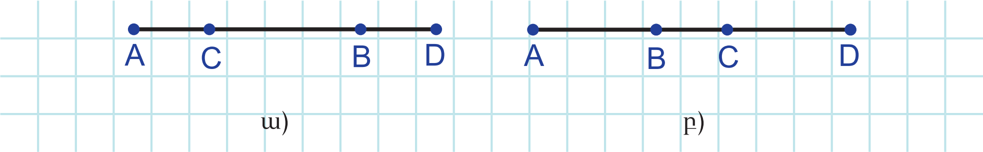
78. Կարո՞ղ են հավասար չլինել՝ ա) երկու ճառագայթներ, բ) երկու հատվածներ, գ) երկու ուղիղներ:

79. Հինգ կետից ոչ մի երեքը մի ուղղի վրա չէ: Դրանց ամեն մի զույգով տարված է ուղիղ: Ընդամենը քանի՞ ուղիղ է տարված:

80. Հայտնի է, որ տրված վեց ուղղից ամեն մի երեքը անցնում է նույն կետով: Ապացուցեք, որ տրված վեց ուղիղն էլ անցնում են նույն կետով:

81. Երեք ուղիղը քանի՞ մասի կարող է բաժանել հարթությունը: Դիտարկեք բոլոր հնարավոր դեպքերը:

82. Նկար 28 ա)-ում և բ)-ում $AB = CD$: Նկարներից ամեն մեկի էլ ո՞ր հատվածներն են հավասար:



Նկար 28

83. B կետը AC հատվածի միջնակետն է, իսկ D կետը՝ BC հատվածի ինչ-որ ներքին կետ: Գտեք BD և DC հատվածների միջնակետերի հեռավորությունը, եթե $AC = 2a$:

84. AB հատվածի երկարությունը 16 սմ է: AB ուղղի վրա գտեք բոլոր այն կետերը, որոնց համար $DA = 3 \cdot DB$:

85. C կետը AB հատվածը բաժանում է երկու հատվածների, որոնց երկարությունները հարաբերում են ինչպես 2:7: Այդ հատվածներից փոքրի երկարությունը 7 սմ է: Գտեք AB հատվածի երկարությունը:

86. a երկարությամբ հատվածը բաժանված է երեք հավասար մասի: Գտեք առաջին և երրորդ մասերի միջնակետերի հեռավորությունը:

87. 36 սմ երկարությամբ հատվածը երեք կամայական կետով բաժանված է չորս մասի: Առաջին և չորրորդ մասերի միջնակետերի հեռավորությունը 30 սմ է: Գտեք երկրորդ և երրորդ մասերի միջնակետերի հեռավորությունը:

88. m երկարությամբ հատվածը բաժանված է հինգ հավասար մասերի: Գտեք եզրային մասերի միջնակետերի հեռավորությունը:

89. Հայտնի է, որ $\angle ABC = 41^\circ$, $\angle ABD = 69^\circ$: Գտեք CBD անկյունը: Դիտարկեք բոլոր հնարավոր դեպքերը:

90. Գտեք կից անկյունների մեծությունները, եթե դրանց գումարը երեք անգամ մեծ է դրանց տարբերությունից:

91. Գտեք կից անկյունների կիսորդներով կազմված անկյունը:

92. Ապացուցեք, որ եթե ABC և CBD անկյունների կիսորդները փոխուղղահայաց են, ապա A, B և D կետերը միևնույն ուղղի վրա են:

Ուսումնասիրելով այս գլուխը՝

- Համակարգված գիտելիքներ ձեռք բերեցիք երկրաչափության սկզբնական հասկացությունների մասին:
- Իմացաք, թե երկրաչափական որ պատկերներն են կոչվում հավասար: Այդ հասկացությունը կիրառեցիք հատվածների ու անկյունների համար:
- Սովորեցիք հատվածի երկարության, անկյան մեծության հատկությունները, կիրառեցիք դրանք խնդիրներ լուծելիս:
- Իմացաք, թե ինչ է թեորեմն ու դրա ապացուցումը, ինչ է աքսիոմը: Իմացաք, որ ցանկացած երկու կետով անցնում է ուղիղ, ընդ որում՝ միայն մեկը:
- Սովորեցիք կից և հակադիր անկյունների հատկությունները, կիրառեցիք դրանք խնդիրներ լուծելիս:
- Արեցիք, ապացուցման երկրաչափական խնդիրներ լուծելու առաջին քայլերը:

Գլուխ II

ԵՌԱՆԿՅՈՒՆ: ԵՐԿՐԱՉԱՓԱԿԱՆ ԿԱՌՈՒՑՈՒՄՆԵՐ

Ուսումնասիրելով այս գլուխը՝

- Կծանոթանաք եռանկյան տարրերին ու տեսակներին, կիմանաք դրանց հատկությունները:
- Կսովորեք եռանկյունների հավասարության հայտանիշները, ինչը հնարավորություն կտա հիմնավորել եռանկյունների հավասարությունը՝ առանց դրանք վերադնելու: Կկիրառեք այդ հայտանիշները խնդիրներ լուծելիս:
- Կսովորեք հավասարասրուն եռանկյան հատկություններն ու հայտանիշը, եռանկյան արտաքին անկյան հատկությունը, կկիրառեք դրանք խնդիրներ լուծելիս:
- Կիմանաք, թե որ ուղիղն է կոչվում հատվածի միջնուղղահայաց, ինչ հատկություն ունի այն:
- Կիմանաք, թե ինչպես ձևակերպել տրված պնդման հակադարձ պնդումը, կծանոթանաք պնդումներ ապացուցելու հակասող ենթադրության մեթոդին:
- Կիմանաք, թե ինչպես կարկինով և առանց բաժանումների քանոնով կառուցել տրված հատվածին և անկյանը հավասար հատված և անկյուն, հատվածի միջնակետը, անկյան կիսորդը:

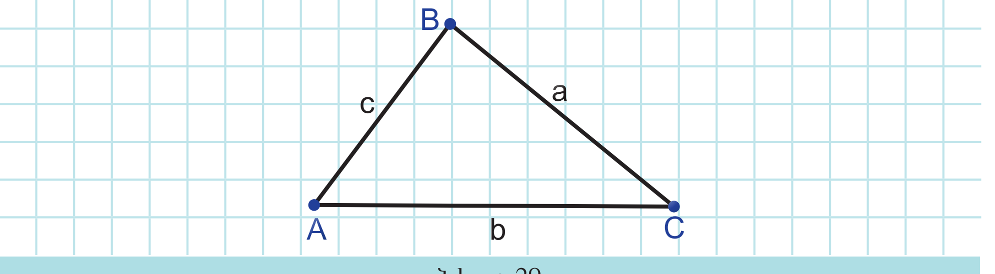
§5. Եռանկյունների հավասարության առաջին հայտանիշը

❐ 13. Եռանկյուն

Սահմանում: Մի ուղղի չպատկանող երեք կետերը զույգ առ զույգ միացնող հատվածներով ու դրանցով սահմանափակված հարթության մասով կազմված երկրաչափական պատկերը կոչվում է եռանկյուն:

Այդ կետերը կոչվում են եռանկյան գագաթներ, իսկ դրանք միացնող հատվածները՝ եռանկյան կողմեր:

Նկար 29-ում տեսնում ենք A, B, C գագաթներով և AB, BC, AC կողմերով եռանկյունը:



Նկար 29

Եռանկյան կողմերը և դրանց երկարությունները հաճախ նշանակում են a, b և c տառերով: BAC, ABC և BCA անկյունները կոչվում են **եռանկյան անկյուններ**: Դրանք կարելի է նշանակել նաև $\angle A$, $\angle B$ և $\angle C$: Եռանկյան կողմերը և անկյունները կոչվում են **եռանկյան տարրեր**:

Եռանկյունը նշանակելու համար կօգտվենք եռանկյան նշանից՝ Δ և եռանկյան գագաթների անուններից: Գագաթների անունները կարելի է գրել ցանկացած հերթականությամբ: Օրինակ, նկար 29-ի եռանկյունը կարելի է նշանակել ΔABC, ΔBCA, ΔCAB և այլն:

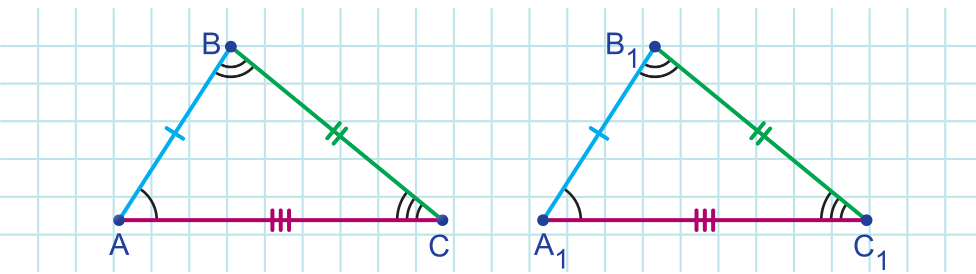
Սահմանում: Եռանկյան բոլոր կողմերի երկարությունների գումարը կոչվում է եռանկյան պարագիծ:

Եռանկյան պարագիծը նշանակվում է P տառով. $P = a + b + c$ կամ $P_{ABC} = a + b + c$:

❒ 14. Եռանկյունների հավասարության առաջին հայտանիշը

Հիշենք, որ երկու պատկեր, մասնավորապես, երկու եռանկյուն կոչվում են հավասար, եթե հնարավոր է դրանք վերադնել այնպես, որ համընկնեն:

Ենթադրենք՝ նկար 30-ի ABC և $A_1B_1C_1$ եռանկյունները հավասար են: Դա նշանակում է, որ այդ եռանկյունները կարելի է վերադնել այնպես, որ դրանց բոլոր գագաթներն ու կողմերը զույգ առ զույգ համընկնեն: Պարզ է, որ զույգ առ զույգ կհամընկնեն նաև այդ եռանկյունների անկյունները: Այսպիսով, եթե երկու եռանկյուն հավասար են, ապա դրանց տարրերը զույգ առ զույգ հավասար են:



Նկար 30

Եթե ABC և $A_1B_1C_1$ եռանկյունները վերադնելիս, օրինակ, $\angle A$-ն համընկել է $\angle A_1$-ին, ապա BC կողմը համընկած կլինի B_1C_1 կողմին, կամ եթե, օրինակ, AB կողմը համընկել է A_1B_1 կողմին, ապա C անկյունը համընկած կլինի C_1 անկյանը: Ուրեմն, **հավասար եռանկյունների հավասար անկյունների դիմացի կողմերը հավասար են,** և հակառակը՝ **հավասար կողմերի դիմացի անկյունները հավասար են:**

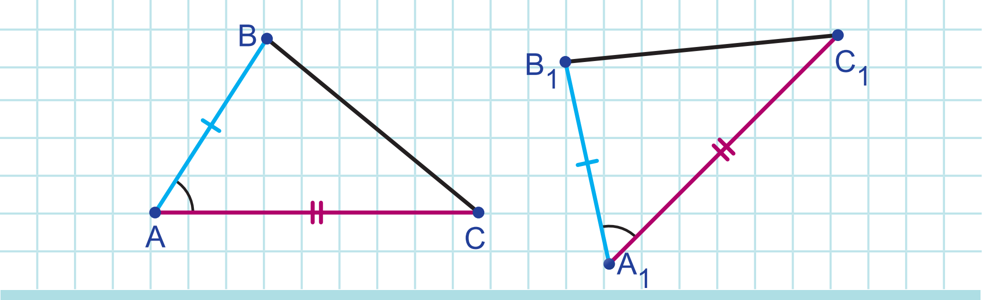
ABC և $A_1B_1C_1$ եռանկյունների հավասարության փաստը գրվում է այսպես. $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$:

Հասկանալի է, որ եռանկյունների հավասարությունը պարզել դրանք վերադնելու միջոցով, միշտ չէ, որ հարմար է: Խնդիրներ լուծելիս և գործնականում գերադասելի է դա անել եռանկյունների տարրերը համեմատելով:

Այդպիսի թեորեմները կոչվում են **եռանկյունների հավասարության հայտանիշներ**: Ներկայացնենք դրանցից առաջինը:

Թեորեմ: (Եռանկյունների հավասարության I հայտանիշ) Եթե մի եռանկյան երկու կողմն ու դրանցով կազմված անկյունը համապատասխանաբար հավասար են մյուս եռանկյան երկու կողմին ու դրանցով կազմված անկյանը, ապա այդ եռանկյունները հավասար են (նկ. 31):

Ապացուցում: Ենթադրենք՝ ABC և $A_1B_1C_1$ եռանկյուններում $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$ և $\angle A = \angle A_1$:



Նկար 31

Ապացուցենք, որ $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$:

Քանի որ $\angle A = \angle A_1$, ապա հնարավոր է ABC եռանկյունը վերադնել $A_1B_1C_1$ եռանկյանը այնպես, որ A գագաթը համընկնի A_1 գագաթին, իսկ AB և AC կողմերը համապատասխանաբար վերադրվեն A_1B_1 և A_1C_1 ճառագայթների վրա: Բայց $AB = A_1B_1$, իսկ $AC = A_1C_1$: Հետևաբար, այդ վերադրման դեպքում AB հատվածը կհամընկնի A_1B_1 հատվածին, իսկ AC հատվածը՝ A_1C_1 հատվածին: Այդպիսով, կհամընկնեն նաև B և B_1, C և C_1 գագաթները: Ուրեմն, կհամընկնեն BC և B_1C_1 հատվածները:

Հետևաբար, ABC եռանկյունն ամբողջությամբ կհամընկնի $A_1B_1C_1$ եռանկյանը, ինչն էլ կնշանակի, որ ABC և $A_1B_1C_1$ եռանկյունները հավասար են: Թեորեմն ապացուցված է:

Հարցեր և առաջադրանքներ

93. Գտեք ABC եռանկյան պարագիծը, եթե $AB = 10$ սմ, $BC = 5$ սմ, $AC = 13$ սմ:

94. ABC և MNK եռանկյուններից որի՞ պարագիծն է մեծ և որքանով, եթե $AB = 12$ սմ, $BC = 7$ սմ, $AC = 14$ սմ, $MN = 3$ սմ, $NK = 20$ սմ, $MK = 18$ սմ:

95. Եռանկյան երկու կողմերը հավասար են, իսկ երրորդ կողմը փոքր է դրանցից 2 անգամ: Գտեք եռանկյան կողմերը, եթե դրա պարագիծը 55 դմ է:

96. Եռանկյան երկու կողմերը հավասար են, իսկ երրորդ կողմը դրանցից մեծ է 7 սմ–ով: Գտեք եռանկյան կողմերը, եթե դրա պարագիծը 52 սմ է:

97. Եռանկյան կողմերը հարաբերում են ինչպես 2:4:5: Գտեք եռանկյան կողմերը, եթե դրա պարագիծը 66 սմ է:

98. Եռանկյան կողմերը հարաբերում են ինչպես 7:5:3: Գտեք եռանկյան կողմերը, եթե դրա պարագիծը 120 սմ է:

99. Եռանկյան կողմերը հարաբերում են ինչպես 3:4:6: Գտեք եռանկյան պարագիծը, եթե ամենամեծ կողմը 30 դմ է:

100. ABC և MNK հավասար եռանկյուններում՝ $\angle A = \angle M$, $\angle B = \angle N$, $\angle C = \angle K$: ABC և MNK եռանկյունների ո՞ր կողմերն են համապատասխանաբար հավասար:

101. ABC և MNK հավասար եռանկյուններում՝ $AB = MN$, $BC = NK$, $\angle M = 40^\circ$, $\angle N = 60^\circ$, $\angle K = 80^\circ$: ABC և MNK եռանկյունների ո՞ր անկյուններն են համապատասխանաբար հավասար:

102. ABC և MNK եռանկյունները հավասար են: ABC եռանկյան պարագիծը 65 սմ է: Ինչի՞ է հավասար MNK եռանկյան պարագիծը:

103. ABC և BCK եռանկյունները հավասար են, ընդ որում՝ $\angle BCK = \angle BCA$, $AB = 12$ սմ, $AC = 15$ սմ: Գտեք KC–ն և BK–ն:

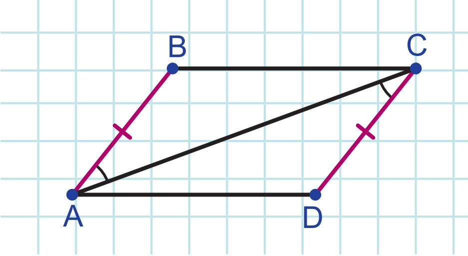
104. ABC և BCK եռանկյունները հավասար են, ընդ որում՝ $AB = CK$, $AC = BK$, $\angle ABC = 85^\circ$, $\angle BAC = 35^\circ$, $\angle BCA = 60^\circ$: Գտեք $\angle CBK$–ն, $\angle BCK$–ն, $\angle BKC$–ն:

105. Հավասա՞ր են ABC և MNK եռանկյունները, եթե $AB = MN$, $AC = MK$, $\angle BAC = \angle NMK$: Պատասխանը հիմնավորեք:

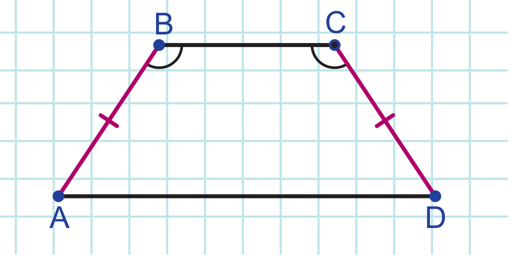
106. Հավասա՞ր են ABC և MNP եռանկյունները, եթե $AB = MP$, $AC = NP$, $\angle BAC = \angle MPN$: Պատասխանը հիմնավորեք:

107. Տեղի ունե՞ն եռանկյունների հավասարության I հայտանիշի պայմանները ABC և MNK եռանկյունների համար, եթե $AB = MK$, $AC = NK$, $\angle BAC = \angle MNK$:

108. Նկար 32–ում $AB = CD$, $\angle BAC = \angle ACD$: Հավասա՞ր են ABC և ADC եռանկյունները: Պատասխանը հիմնավորեք:



Նկար 32

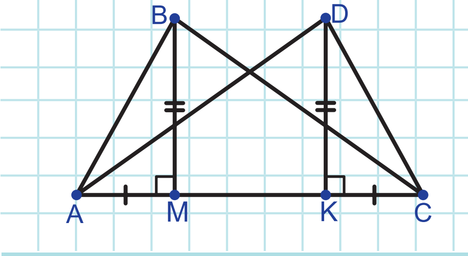


Նկար 33

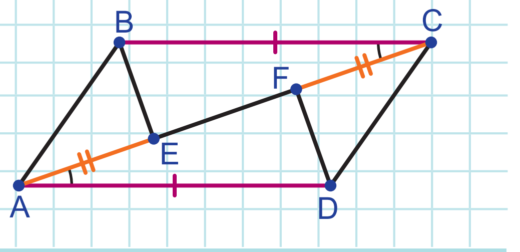
109. Նկար 33–ում $AB = CD$, $\angle ABC = \angle BCD$: Հավասա՞ր են ABC և BCD եռանկյունները: Պատասխանը հիմնավորեք:

110. O կետը և՛ AB, և՛ CD հատվածի միջնակետն է: Ապացուցեք, որ $\Delta AOD = \Delta COB$:

111. Նկար 34–ում $BM \perp AC$, $DK \perp AC$, $AM = CK$, $BM = DK$: Ապացուցեք, որ $\Delta ABC = \Delta ADC$:



Նկար 34

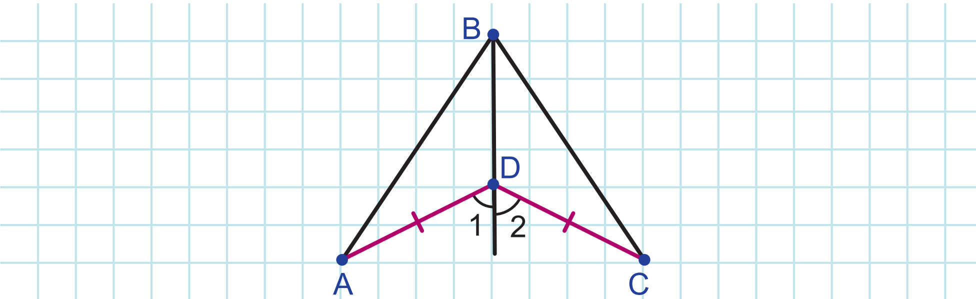


Նկար 35

112. O կետը և՛ AB, և՛ CD հատվածի միջնակետն է: Ապացուցեք, որ $\Delta ABC = \Delta ABD$:

113. Նկար 35–ում $BC = AD$, $\angle CAD = \angle BCA$, $AE = CF$: Գտեք BE–ն, եթե $DF = 7$ սմ:

114. Նկար 36–ում $AD = DC$, $\angle 1 = \angle 2$: Գտեք $\angle ABD$ –ն, եթե հայտնի է, որ $\angle DBC = 33^\circ$:



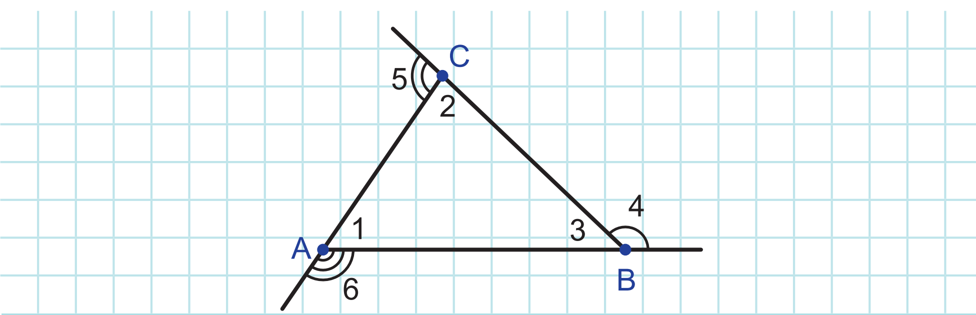
Նկար 36

§6. Եռանկյունների հավասարության երկրորդ հայտանիշը

❒ 15. Եռանկյան արտաքին անկյուն

Սահմանում: Եռանկյան որևէ անկյանը կից անկյունը կոչվում է եռանկյան արտաքին անկյուն:

Նկար 37–ում $\angle 4$ –ը ABC եռանկյան արտաքին անկյունն է: Արտաքին անկյուն են նաև $\angle 5$ –ն ու $\angle 6$ –ը:

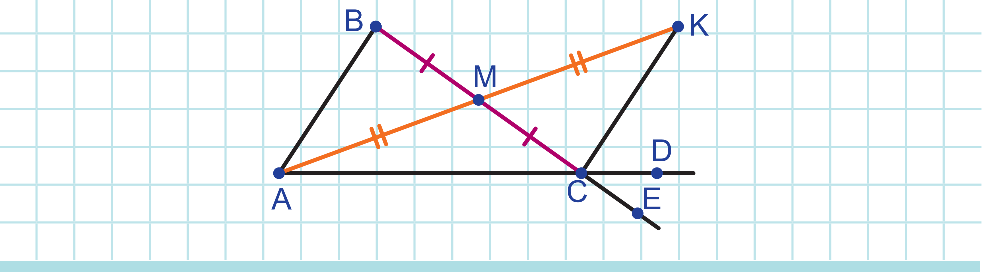


Նկար 37

Պարզ է, որ եռանկյան ամեն մի գագաթին հարակից կա երկու արտաքին անկյուն: Դրանք հակադիր անկյուններ են և, հետևաբար, մեծությամբ հավասար են:

Թեորեմ: Եռանկյան արտաքին անկյունը մեծ է եռանկյան այն անկյուններից, որոնք կից չեն այդ արտաքին անկյանը:

Ապացուցում: Դիտարկենք ABC եռանկյան BCD արտաքին անկյունը (տե՛ս նկ. 38) և ցույց տանք, որ անկյուն BCD-ն մեծ է ABC եռանկյան և՛ A անկյունից, և՛ B անկյունից:



Նկար 38

A գագաթը միացնենք BC կողմի M միջնակետին և AM ճառագայթի վրա վերցնենք K կետն այնպես, որ $AM = MK$: K կետը միացնենք C կետին և դիտարկենք ABM և KMC եռանկյունները:

Այդ եռանկյուններում $BM = MC$, $AM = MK$ (ըստ կառուցման): Բացի այդ, որպես հակադիր անկյուններ, $\angle BMA = \angle CMK$: Հետևաբար, ըստ եռանկյունների հավասարության I հայտանիշի, $\Delta ABM = \Delta CMK$: Վերջինից հետևում է, որ $\angle B = \angle BCK$: Բայց BCK անկյունը BCD անկյան մի մասն է: Ուրեմն, BCD անկյունը մեծ է BCK անկյունից և դրան հավասար B անկյունից:

Եթե BCD արտաքին անկյան փոխարեն դիտարկենք ACE արտաքին անկյունը և այս անգամ B գագաթը միացնենք AC կողմի միջնակետին ու նույնքան շարունակենք, ապա համանման ձևով կարող ենք ցույց տալ, որ $\angle ACE > \angle A$: Բայց ACE և BCD անկյունները հակադիր անկյուններ են: Ուրեմն, դրանք հավասար են: Այսպիսով, BCD արտաքին անկյունը մեծ է նաև A անկյունից: Թեորեմն ապացուցված է:

Դինամիկ մաթեմատիկա

Դինամիկ մաթեմատիկայի ծրագրով կառուցեք եռանկյուն: Շարունակեք եռանկյան կողմերից մեկը և չափեք առաջացած արտաքին անկյունը: Թաքցրեք անկյան մեծությունը և ստեղծեք գրություն, որը ցույց է տալիս այդ անկյան մեծությունը:

Չափեք նաև եռանկյան այն անկյունները, որոնք կից չեն այդ արտաքին անկյանը: Թաքցրեք դրանց մեծությունները և ստեղծեք գրություններ, որոնք ցույց են տալիս այդ անկյունների մեծությունները:

Շարժելով եռանկյան տարբեր գագաթները՝ հետևեք անկյունների մեծություններին: Համեմատեք արտաքին անկյան մեծությունը չափված մյուս անկյունների մեծությունների հետ: Արեք եզրակացություն:

❐ 16. Եռանկյունների դասակարգումը

Արտաքին անկյան մասին նախորդ կետում ներկայացված թեորեմից հետևում է, որ.

Հետևանք: Եթե եռանկյան անկյուններից մեկն ուղիղ է կամ բութ, ապա մյուս անկյունները սուր են:

Ապացուցում: Ենթադրենք՝ եռանկյան անկյուններից մեկն ուղիղ է կամ բութ: Քանի որ կից անկյունների գումարը 180° է, ապա դրան կից արտաքին անկյունը կլինի ուղիղ կամ սուր: Ըստ արտաքին անկյան հատկության՝ եռանկյան մյուս անկյունները փոքր կլինեն ուղիղ կամ սուր արտաքին անկյունից: Ուրեմն, դրանք կլինեն սուր: Հետևանքն ապացուցված է:

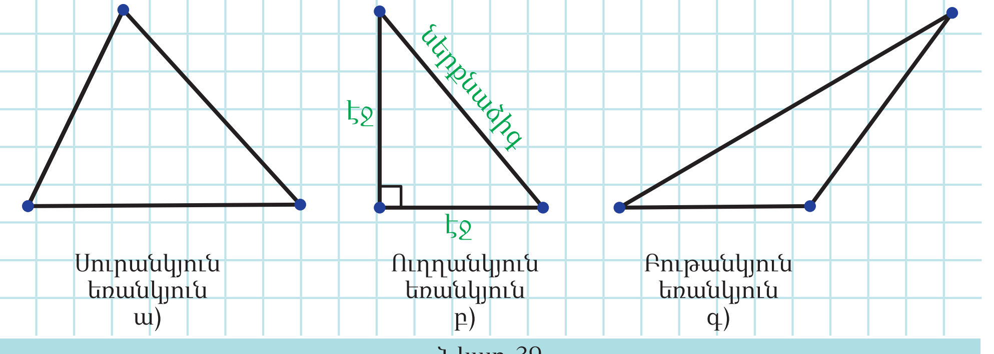
Այսպիսով, **եռանկյան անկյուններից միայն մեկը կարող է լինել բութ կամ ուղիղ:**

Եռանկյունները, անկյունների մեծություններից կախված, բաժանվում են երեք տեսակի՝ **սուրանկյուն** եռանկյուններ, **ուղղանկյուն** եռանկյուններ, **բութանկյուն** եռանկյուններ:

Սահմանում: Եռանկյունը, որի բոլոր անկյունները սուր են, կոչվում է սուրանկյուն եռանկյուն (նկ. 39 ա):

Սահմանում: Եռանկյունը, որի անկյուններից մեկն ուղիղ է, կոչվում է ուղղանկյուն եռանկյուն (նկ. 39 բ): Ուղղանկյուն եռանկյան ուղիղ անկյան դիմացի կողմը կոչվում է ներքնաձիգ, իսկ մյուս երկու կողմերը՝ էջեր:

Սահմանում: Եռանկյունը, որի անկյուններից մեկը բութ է, կոչվում է բութանկյուն եռանկյուն (նկ. 39 գ):

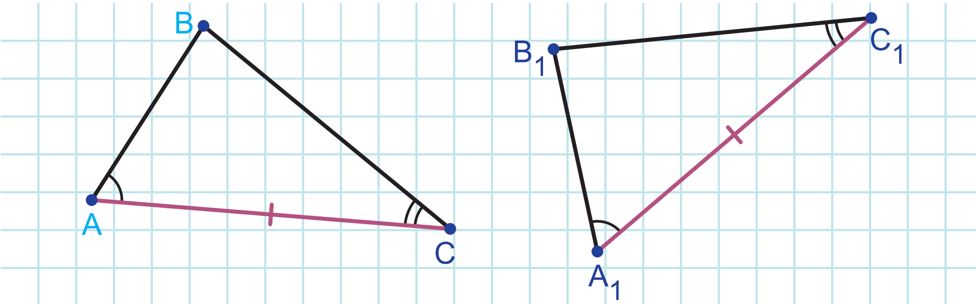


Նկար 39

❐ 17. Եռանկյունների հավասարության երկրորդ հայտանիշը

Թեորեմ: (Եռանկյունների հավասարության II հայտանիշ) Եթե մի եռանկյան կողմն ու դրան առընթեր երկու անկյունը համապատասխանաբար հավասար են մյուս եռանկյան կողմին ու դրան առընթեր երկու անկյանը, ապա այդ եռանկյունները հավասար են (նկ. 40):

Ապացուցում: Ենթադրենք՝ ABC և $A_1B_1C_1$ եռանկյուններում $AC = A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$ և $\angle C = \angle C_1$:



Նկար 40

Ապացուցենք, որ $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$:

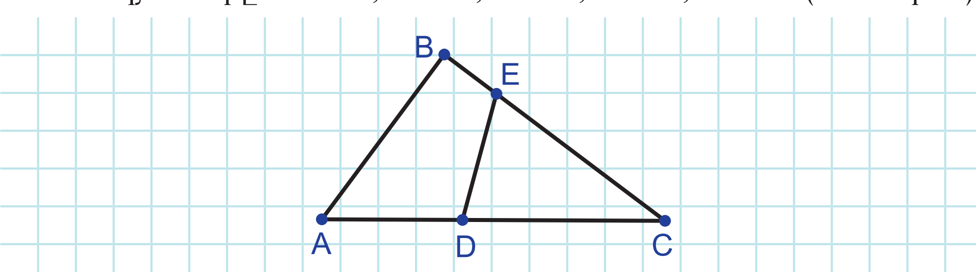
Վերադնենք ABC և $A_1B_1C_1$ եռանկյուններն այնպես, որ AC և A_1C_1 հավասար կողմերը համընկնեն, իսկ B և B_1 գագաթները գտնվեն A_1C_1 ուղղի միևնույն կողմում:

Քանի որ $\angle A = \angle A_1$, իսկ $\angle C = \angle C_1$, ապա այդ վերադրման ժամանակ AB կողմը կվերադրվի A_1B_1 ճառագայթի, իսկ CB կողմը՝ C_1B_1 ճառագայթի վրա: Այդ դեպքում, B գագաթը, որը պատկանում է և՛ AB կողմին, և՛ CB կողմին, կգտնվի և՛ A_1B_1, և՛ C_1B_1 ճառագայթի վրա: Բայց A_1B_1 և C_1B_1 ճառագայթները հատվում են B_1 կետում: Ուրեմն, B կետը կհամընկնի B_1 կետին:

Այսպիսով, բացի AC և A_1C_1 կողմերից՝ կհամընկնեն նաև AB և A_1B_1, CB և C_1B_1 կողմերը: Ուրեմն, ABC և $A_1B_1C_1$ եռանկյուններն ամբողջությամբ կհամընկնեն, ինչն էլ կնշանակի, որ ABC և $A_1B_1C_1$ եռանկյունները հավասար են: Թեորեմն ապացուցված է:

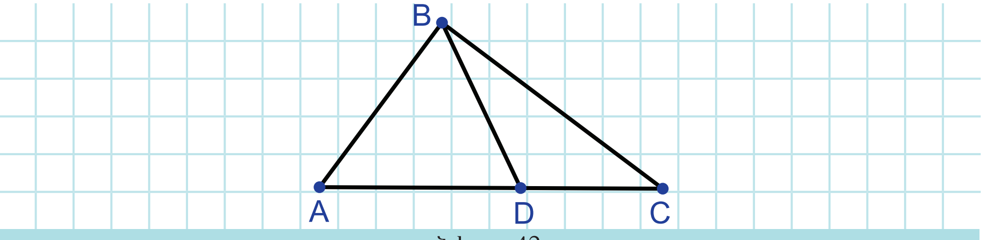
Հարցեր և խնդիրներ

115. Նշված անկյուններից առանձնացրեք CDE եռանկյան արտաքին անկյունները. $\angle BCA$, $\angle DEC$, $\angle DEB$, $\angle ECD$, $\angle EDA$ (տես նկ. 41):



Նկար 41

116. Նշված անկյուններից ընտրեք ABD և BDC եռանկյունների արտաքին անկյունները. $\angle ABD$, $\angle BDC$, $\angle BCA$, $\angle DBC$, $\angle ADB$ (տե՛ս նկ. 42):



Նկար 42

117. ABC եռանկյան C գագաթին հարակից արտաքին անկյունը 47° է: Կարո՞ղ է եռանկյան B անկյունը լինել 53°, իսկ A անկյո՞ւնը:

118. Նկար 42–ում $\angle BCD = 32^\circ$: Անկյուն ADB–ն կարո՞ղ է լինել 29°:

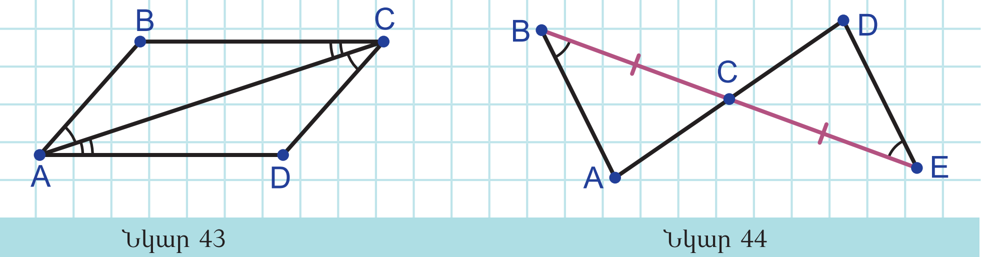
119. Քանի՞ ուղիղ անկյուն կարող է ունենալ եռանկյունը:

120. Քանի՞ բութ անկյուն կարող է ունենալ եռանկյունը:

121. Եռանկյան արտաքին անկյուններից մեկը սուր է: Ինչպիսի՞ն է այդ եռանկյունը:

122. ABC և MNK եռանկյուններում AB = MN, $\angle BAC = \angle NMK$, $\angle ABC = \angle MNK$: Հավասա՞ր են ABC և MNK եռանկյունները: Պատասխանը հիմնավորեք:

123. Նկար 43–ում $\angle BAC = \angle ACD$, $\angle BCA = \angle CAD$: Հավասա՞ր են ABC և ADC եռանկյունները: Պատասխանը հիմնավորեք:

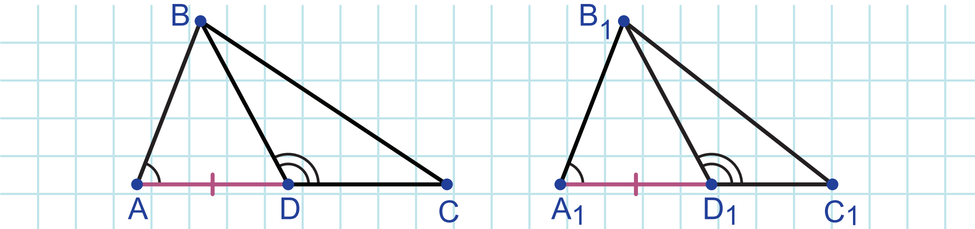


Նկար 43 Նկար 44

124. ABC եռանկյունում $AB = 10$ սմ, $\angle A = 40^\circ$, $\angle B = 84^\circ$, իսկ MNK եռանկյունում $MN = 10$ սմ, $\angle M = 40^\circ$, $\angle K = 84^\circ$: Տեղի ունե՞ն եռանկյունների հավասարության II հայտանիշի պայմանները ABC և MNK եռանկյունների համար:

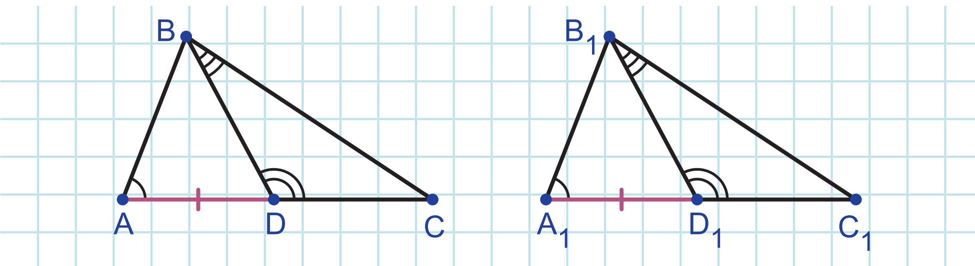
125. Ապացուցեք, որ $\Delta ABC = \Delta CDE$, եթե $\angle ABC = \angle CED$, $BC = CE$ (նկ. 44):

126. Նկար 45–ում $AD = A_1D_1$, $\angle A = \angle A_1$, $\angle BDC = \angle B_1D_1C_1$: Ապացուցեք, որ $\Delta ABD = \Delta A_1B_1D_1$:



Նկար 45

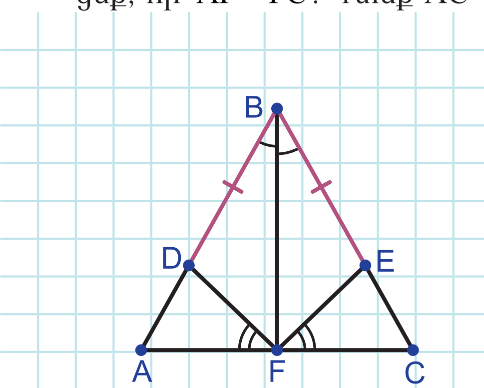
127. Նկար 46–ում $AD = A_1D_1$, $\angle A = \angle A_1$, $\angle BDC = \angle B_1D_1C_1$, $\angle DBC = \angle D_1B_1C_1$: Ապացուցեք, որ $DC = D_1C_1$:



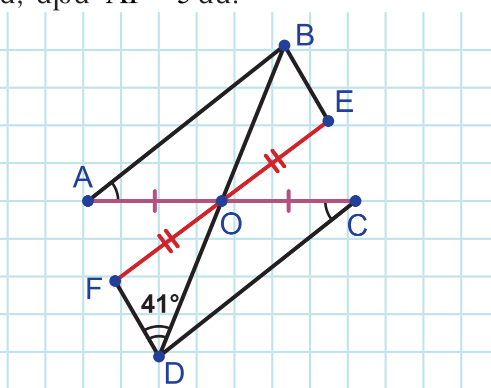
Նկար 46

128. Ապացուցեք, որ եթե մի ուղղանկյուն եռանկյան էջը և դրան առընթեր սուր անկյունը համապատասխանաբար հավասար են մյուսի էջին և դրան առընթեր սուր անկյանը, ապա այդ եռանկյունները հավասար են:

129. Նկար 47–ում $BD = BE$, $\angle DBF = \angle FBE$, $\angle AFD = \angle CFE$: Ապացուցեք, որ $AF = FC$: Գտեք AC–ն, եթե $AF = 5$ սմ:



Նկար 47



Նկար 48

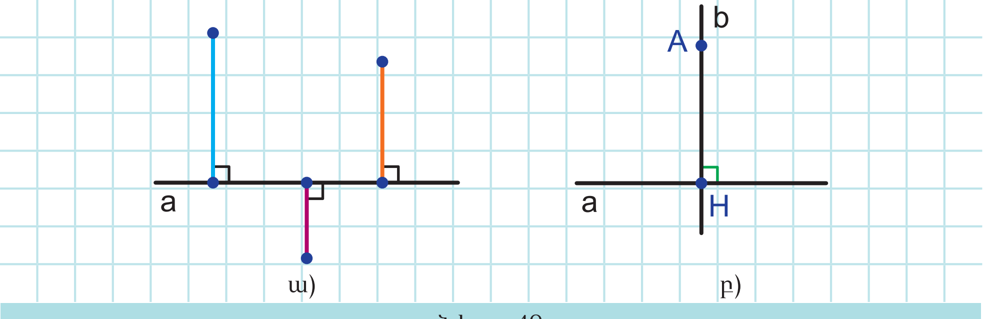
130. Նկար 48–ում $\angle BAO = \angle DCO$, $AO = OC$, $EO = OF$: Գտեք $\angle OBE$ –ն, եթե $\angle ODF = 41^{\circ}$:

§7. Եռանկյան միջնագծերը, կիսորդներն ու բարձրությունները

❒ 18. Ուղղին ուղղահայաց

Սահմանում: Տրված ուղղին ուղղահայաց կոչվում է այդ ուղղին ուղղահայաց ուղղի այն հատվածը, որի մի ծայրակետը այդ ուղիղների հատման կետն է (նկ. 49 ա): Այդ ծայրակետը կոչվում է ուղղահայացի հիմք:

Նկար 49 բ)-ում A կետից a ուղղին տարված ուղղահայացը AH հատվածն է, ուղղահայացի հիմքը՝ H կետը:



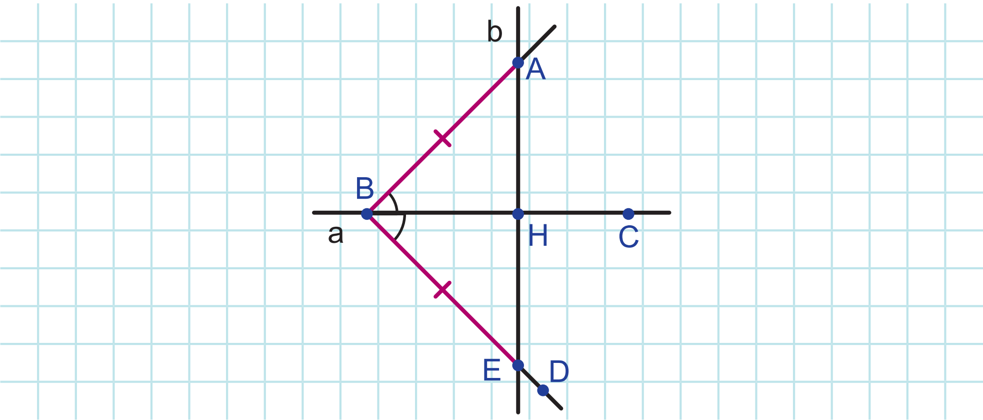
Նկար 49

Թեորեմ: Ուղղին չպատկանող կետով այդ ուղղին կարելի է տանել ուղղահայաց, ընդ որում՝ միայն մեկը:

Ապացուցում: Նախ ապացուցենք, որ ուղղին չպատկանող կետով այդ ուղղին կարելի է տանել ուղղահայաց:

Թող A-ն լինի a ուղղին չպատկանող որևէ կետ: a ուղղի վրա վերցնենք ինչ-որ B և C կետեր (նկ. 50):

BC ուղղի մյուս կողմում տեղադրենք ABC անկյանը հավասար CBD անկյունը: BD ճառագայթի վրա տեղադրենք AB հատվածին հավասար BE հատվածը: AE և a ուղիղների հատման կետը նշանակենք H-ով: Համոզվենք, որ AH հատվածը որոնելի ուղղահայացն է: Դրա համար դիտարկենք ABH և EBH եռանկյունները:

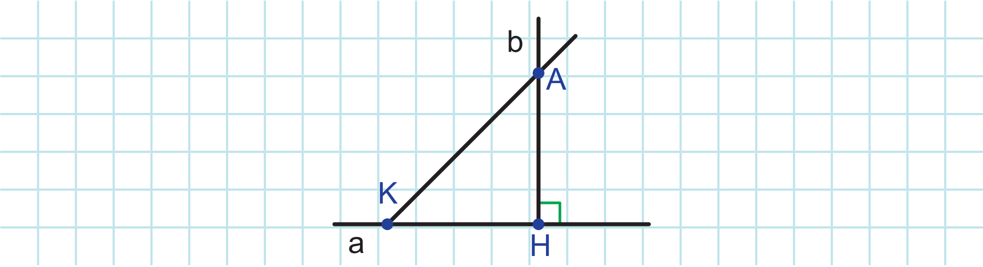


Նկար 50

Քանի որ $AB = BE$, $\angle ABH = \angle HBE$ (ըստ կառուցման), իսկ BH–ը այդ եռանկյունների ընդհանուր կողմն է, ապա, ըստ եռանկյունների հավասարության I հատկանիշի, $\Delta ABH = \Delta EBH$: Որպես այդ հավասար եռանկյունների AB և BE հավասար կողմերի դիմացի անկյուններ՝ $\angle AHB = \angle EHB$: Մյուս կողմից, $\angle AHB + \angle EHB = 180^\circ$, քանի որ այդ անկյունները կից անկյուններ են: Ուրեմն, դրանք երկուսն էլ 90° են: Դա էլ հենց նշանակում է, որ $AH \perp a$:

Մնում է ապացուցել, որ A կետից a ուղղին այլ ուղղահայաց հնարավոր չէ տանել:

Իրոք, A կետը a ուղղի H–ից տարբեր ցանկացած K կետի միացնելիս կառաջանա ABH եռանկյունը, որի արտաքին անկյունն ուղիղ է (նկ. 51):



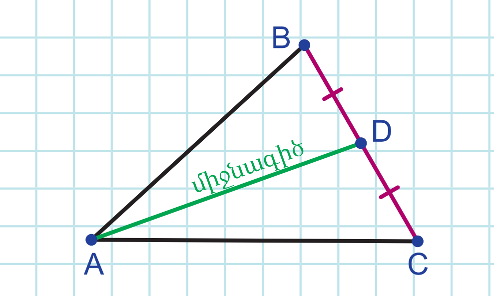
Նկար 51

Այդ դեպքում, ըստ արտաքին անկյան հատկության, $\angle AKH$–ը փոքր կլինի ուղիղ անկյունից: Ուրեմն, AK–ն ուղղահայաց չէ a ուղղին: Թեորեմն ապացուցված է:

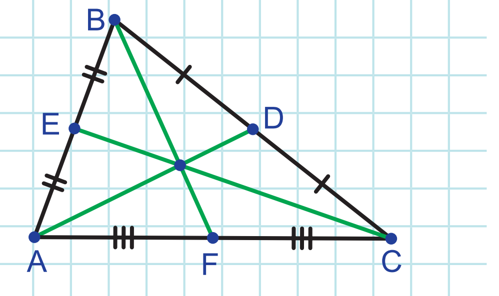
❒ 19. Եռանկյան միջնագծերը, կիսորդներն ու բարձրությունները

Սահմանում: Եռանկյան գագաթը դրա դիմացի կողմի միջնակետին միացնող հատվածը կոչվում է եռանկյան միջնագիծ (նկ. 52):

Պարզ է, որ ամեն մի եռանկյուն ունի երեք միջնագիծ (նկ. 53):



Նկար 52

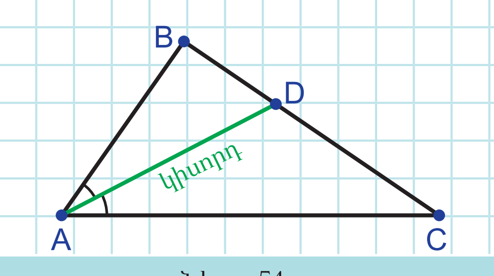


Նկար 53

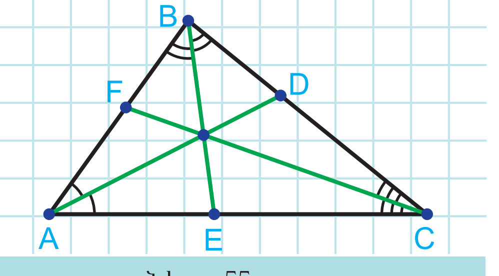
Հիմա դա չենք ապացուցի, բայց հիշեք, որ եռանկյան միջնագծերը հատվում են մի կետում:

Սահմանում: Եռանկյան անկյան կիսորդի (ճառագայթի) այն հատվածը, որը եռանկյան գագաթը միացնում է դրա դիմացի կողմի կետին, կոչվում է եռանկյան կիսորդ (նկ. 54):

Պարզ է, որ ամեն մի եռանկյուն ունի երեք կիսորդ (նկ. 55):



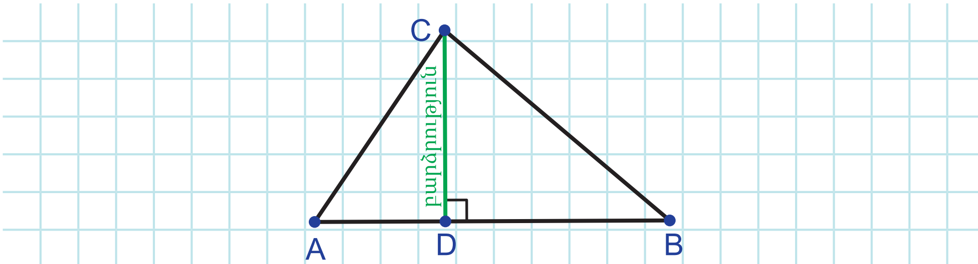
Նկար 54



Նկար 55

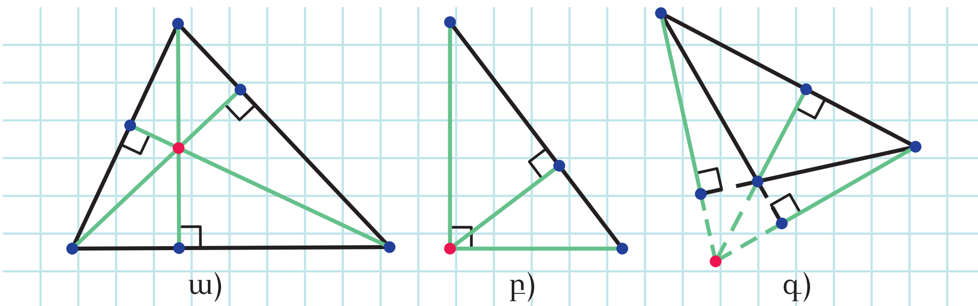
Հիշեք, որ եռանկյան կիսորդները հատվում են մի կետում: Դա կապացուցվի հետագայում:

Սահմանում: Եռանկյան գագաթից դրա դիմացի կողմը պարունակող ուղղին տարված ուղղահայացը կոչվում է եռանկյան բարձրություն (նկ. 56):



Նկար 56

Քանի որ ուղղի վրա չգտնվող կետով այդ ուղղին կարելի է տանել միայն մեկ ուղղահայաց, ապա ամեն մի եռանկյուն ունի երեք բարձրություն (նկ. 57 ա, բ, գ):



Նկար 57

Հիմա դա չենք ապացուցի, բայց հիշեք, որ եռանկյան բարձրությունները կամ դրանց շարունակությունները հատվում են մի կետում:

57 ա) և 57 բ) նկարներում եռանկյան բարձրություններն են հատվել մի կետում, իսկ 57 գ) նկարում՝ բարձրությունների շարունակությունները:

Դինամիկ մաթեմատիկա

1. Դինամիկ մաթեմատիկայի ծրագրով կառուցեք ABC եռանկյուն: Կառուցեք եռանկյան կողմերի միջնակետերը, ապա եռանկյան միջնագծերը: Կառուցեք եռանկյան միջնագծերի հատման կետը:

Շարժեք եռանկյան գագաթները և հետևեք միջնագծերի հատման կետին: Արեք եզրակացություն:

2. Դինամիկ մաթեմատիկայի ծրագրով կառուցեք ABC եռանկյուն: Կառուցեք A, B, C անկյունների կիսորդները և նշեք դրանց հատման կետերը եռանկյան կողմերի հետ: Թաքցրեք կառուցված կիսորդները և կառուցեք եռանկյան կիսորդները: Կառուցեք եռանկյան կիսորդների հատման կետը:
Շարժեք եռանկյան գագաթները և հետևեք կիսորդների հատման կետին: Արեք եզրակացություն:

3. Դինամիկ մաթեմատիկայի ծրագրով կառուցեք ABC եռանկյուն: Կառուցեք եռանկյան միջնագծերի հատման կետը (երկու միջնագիծ կառուցելը բավարար է դա անելու համար):
Կառուցեք եռանկյան կիսորդների հատման կետը (երկու կիսորդ կառուցելը բավարար է դա անելու համար): Շարժեք եռանկյան գագաթներն ու հետևեք կառուցված կետերին: Փորձեք ստանալ այնպիսի եռանկյուն, որ այդ կետերը համընկնեն:

Ինտերակտիվ մոդել

Եռանկյան բարձրությունները

Թղթից կտրեք երեք սուրանկյուն եռանկյուն: Թուղթը ծալելով ստացեք այդ եռանկյուններից մեկի միջնագծերի, մյուսի կիսորդների, երրորդի բարձրությունների հատման կետը:

Հարցեր և առաջադրանքներ

131. Գծեք a ուղիղ: Դրա մի կողմում նշեք A և B, իսկ մյուս կողմում՝ C կետ: Անկյունաքանոնի օգնությամբ այդ կետերից տարեք a ուղղին ուղղահայացներ:

132. Գծեք ABC եռանկյուն: Մասշտաբային քանոնի օգնությամբ նշեք BC կողմի միջնակետը և տարեք AD միջնագիծը:

133. Գծեք MNK եռանկյուն: Տարեք դրա MD, NE և KF միջնագծերը:

134. ABC եռանկյունում $AB = 7$ սմ, $BC = 6$ սմ, $AC = 10$ սմ: Տարված են այդ եռանկյան AD, BE և CF միջնագծերը: Գտեք AF, BD և CE հատվածների երկարությունները:

135. ABC եռանկյան BC կողմի վրա վերցված է K կետն այնպես, որ $BK = 5$ դմ: Տարված է AD միջնագիծը: Գտեք BC կողմը, եթե $KD = 2$ դմ: Դիտարկեք բոլոր հնարավոր դեպքերը:

136. Գծեք MNP եռանկյուն: Անկյունաչափով և քանոնով տարեք դրա ME կիսորդը:

137. Գծեք ABC եռանկյուն: Տարեք դրա AM, BN և CK կիսորդները:

138. ABC եռանկյունում $\angle A = 66^\circ$, $\angle B = 42^\circ$, $\angle C = 72^\circ$: Տարված են AM, BN և CK կիսորդները: Գտեք BAM, BCK և NBC անկյունները:

139. ABC եռանկյունում $\angle A = 80^\circ$: Տարված է ABC եռանկյան AM կիսորդը և ABM եռանկյան AK կիսորդը: Գտեք BAK և KAC անկյունները:

140. Գծեք ABC սուրանկյուն եռանկյուն: Անկյունաքանոնով տարեք դրա AH բարձրությունը:

141. Գծեք C ուղիղ անկյունով ABC եռանկյուն: Տարեք դրա բոլոր բարձրությունները:

142. Գծեք որևէ բութանկյուն եռանկյուն և տարեք դրա բոլոր բարձրությունները:

143. ABC եռանկյունում տարված է AK բարձրությունը: Ինչպիսի՞ն է AKB անկյունը:

144. Ապացուցեք, որ հավասար եռանկյուններում հավասար կողմերին տարված միջնագծերը հավասար են:

145. Ապացուցեք, որ հավասար եռանկյուններում հավասար անկյունների կիսորդները հավասար են:

146. A և B կետերը a ուղղի միևնույն կողմում են: a ուղղին տարված են AC և BD ուղղահայացները, ընդ որում՝ $\angle ADC = \angle BCD$: Ապացուցենք, որ $AC = BD$:

147. BD-ն ABC եռանկյան միջնագիծն է: ABD եռանկյան պարագիծը 20 սմ է, իսկ BDC եռանկյան պարագիծը՝ 26 սմ: Գտեք BC և AB կողմերի տարբերությունը:

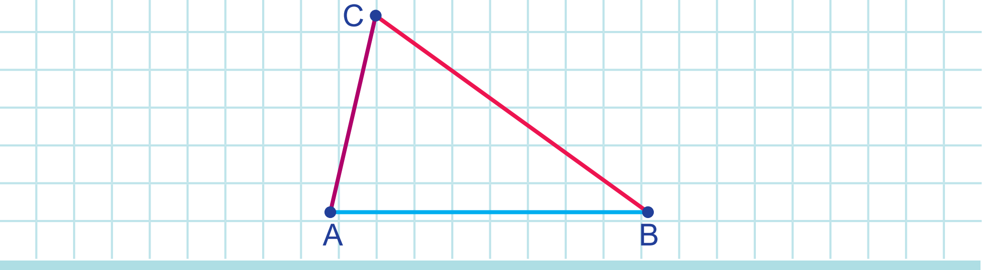
148. ABC և $A_1B_1C_1$ եռանկյունների BK և B_1K_1 կիսորդները հավասար են: Բացի դրանից, $\angle B = \angle B_1$, $\angle AKB = \angle A_1K_1B_1$: Ապացուցեք, որ $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$:

149. ABC և $A_1B_1C_1$ եռանկյունների BM և B_1M_1 միջնագծերը հավասար են: Բացի դրանից, $\angle ABM = \angle A_1B_1M_1$, $\angle AMB = \angle A_1M_1B_1$: Ապացուցեք, որ $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$:

§8. Հավասարասրուն եռանկյուն

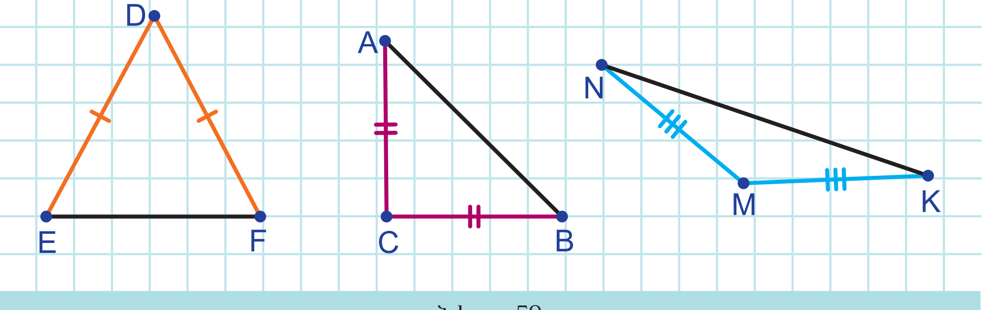
❐ 20. Հավասարասրուն եռանկյուն

Սահմանում: Եռանկյունը, որի բոլոր կողմերը ունեն տարբեր երկարություններ, կոչվում է տարակողմ եռանկյուն (նկ. 58):



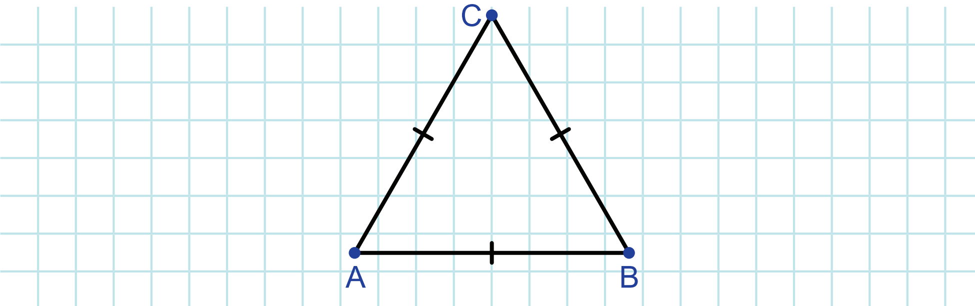
Նկար 58

Սահմանում: Եռանկյունը, որի երկու կողմերը հավասար են, կոչվում է հավասարասրուն եռանկյուն: Հավասար կողմերը կոչվում են սրունքներ, իսկ երրորդ կողմը՝ հիմք (նկ. 59):



Նկար 59

Սահմանում: Եռանկյունը, որի բոլոր կողմերը հավասար են, կոչվում է հավասարակողմ եռանկյուն (նկ. 60):

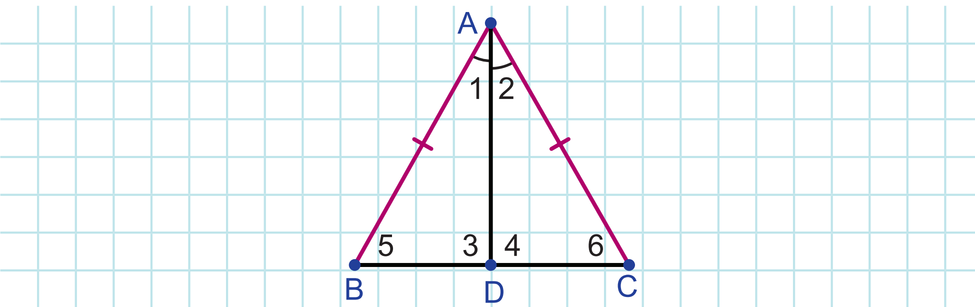


Նկար 60

Ապացուցենք երկու թեորեմ հավասարասրուն եռանկյան հատկությունների մասին:

Թեորեմ: Հավասարասրուն եռանկյան հիմքին առընթեր անկյունները հավասար են:

Ապացուցում: Ենթադրենք՝ ABC եռանկյունը BC հիմքով հավասարասրուն եռանկյուն է, իսկ AD-ն դրա կիսորդն է (նկ. 61):



Նկար 61

Դիտարկենք ADB և ADC եռանկյունները: Այդ եռանկյուններում $AB = AC$ (ABC եռանկյան սրունքներն են), AD կողմն ընդհանուր է: Բացի այդ, $\angle 1 = \angle 2$, քանի որ AD-ն կիսորդ է: Ուրեմն, ըստ եռանկյունների հավասարության I հայտանիշի, $\Delta ADB = \Delta ADC$: Քանի որ հավասար եռանկյուններում հավասար կողմերի դիմացի անկյունները հավասար են, ապա ADB և ADC եռանկյունների AD ընդհանուր կողմի դիմացի անկյունները՝ $\angle 5$-ը և $\angle 6$-ը հավասար են: Թեորեմն ապացուցված է:

Թեորեմ: Հավասարասրուն եռանկյան հիմքին տարված կիսորդը նաև միջնագիծ է ու բարձրություն:

Ապացուցում: Ինչպես տեսանք նախորդ թեորեմն ապացուցելիս, եթե AD-ն BC հիմքով ABC հավասարասրուն եռանկյան կիսորդն է, ապա $\Delta ADB = \Delta ADC$ (նկ. 61): Ուրեմն, 1 և 2 հավասար անկյունների դիմացի կողմերը՝ BD-ն և DC-ն հավասար են՝ $BD = DC$: Հավասար են նաև AB և AC հավասար կողմերի դիմացի անկյունները՝ $\angle 3 = \angle 4$:

Քանի որ $BD = DC$, ապա AD կիսորդը նաև միջնագիծ է:

Քանի որ $\angle 3 = \angle 4$, ու դրանք կից անկյուններ են, իսկ կից անկյունների գումարը 180° է, ապա $\angle 3 = \angle 4 = 90^\circ$: Ուրեմն, AD կիսորդը նաև բարձրություն է:

Այսպիսով, AD կիսորդը նաև միջնագիծ է ու բարձրություն: Թեորեմն ապացուցված է:

Նշենք, որ ապացուցված թեորեմը կարելի է ձևակերպել նաև այսպես. **հավասարասրուն եռանկյան հիմքին տարված կիսորդը, միջնագիծն ու բարձրությունը համընկնում են:**

❒ 21. Հակադարձ թեորեմ

Ամեն մի թեորեմի մեջ կարելի է առանձնացնել երկու մաս՝ պայմանը և եզրակացությունը: **Պայմանն** այն է, ինչը որ տրված է, իսկ **եզրակացությունն** այն է, ինչը պետք է ապացուցել:

Քննարկենք եռանկյունների հավասարության առաջին հայտանիշը. **եթե** մի եռանկյան երկու կողմը և դրանցով կազմված անկյունը համապատասխանաբար հավասար են մյուս եռանկյան երկու կողմին և դրանցով կազմված անկյանը, **ապա** այդ եռանկյունները հավասար են:

Այս թեորեմի պայմանը մի եռանկյան երկու կողմի և դրանցով կազմված անկյան համապատասխանաբար հավասար լինելն է մյուս եռանկյան երկու կողմին և դրանցով կազմված անկյանը (սա տրված է): Իսկ եզրակացությունը այդպիսի եռանկյունների հավասարությունն է (դա պետք է ապացուցել):

Փաստորեն թեորեմի պայմանը տեքստի այն մասն է, որը **եթե** և **ապա** բառերի միջև է, իսկ եզրակացությունն **ապա** բառին հաջորդող մասն է:

Նշենք, որ ամեն մի թեորեմ կարելի է ձևակերպել այնպես, որ տեքստում լինեն եթե և ապա բառերը: Օրինակ, հավասարասրուն եռանկյան երկրորդ հատկությունը կարելի է ձևակերպել այսպես. **եթե** եռանկյունը հավասարասրուն է, **ապա** դրա հիմքին տարված կիսորդը նաև միջնագիծ է ու բարձրություն:

Եթե որևէ թեորեմի պայմանը կամ դրա մի մասը դարձնենք եզրակացություն, իսկ եզրակացությունը կամ դրա մի մասը դարձնենք պայման, ապա կստացվի մի նոր պնդում: Եթե այդ պնդումն ապացուցվում է, ապա դրան անվանում են տրված թեորեմի **հակադարձ թեորեմ**:

Բայց հակադարձ պնդումը կարող է սխալ լինել: Օրինակ, ***եթե երկու անկյուններ հակադիր են, ապա դրանք հավասար են*** պնդումը ճիշտ է, իսկ ***եթե երկու անկյունները հավասար են, ապա դրանք հակադիր են*** պնդումը սխալ է:

Մեկ այլ օրինակ: Ձեզ հայտնի է, որ ***եթե թիվը վերջանում է*** 0 ***թվանշանով, ապա բաժանվում է*** 5***-ի***: Բայց այս պնդման հակադարձը՝ ***եթե թիվը բաժանվում է*** 5***-ի, ապա վերջանում է*** 0 ***թվանշանով*** սխալ է: Հիմնավորելու համար, որ այդ պնդումը սխալ է բավական է, օրինակ, դիտարկել 25 թիվը, որը չի վերջանում 0 թվանշանով, բայց բաժանվում է 5-ի:

Երբ ցույց է տրվում որևէ պնդման սխալ լինելը, ասում են, որ պնդումը **հերքվեց**:

Ուրեմն, հիշեք, որ որևէ պնդման ճիշտ լինելը չի երաշխավորում դրան հակադարձ պնդման ճիշտ լինելը:

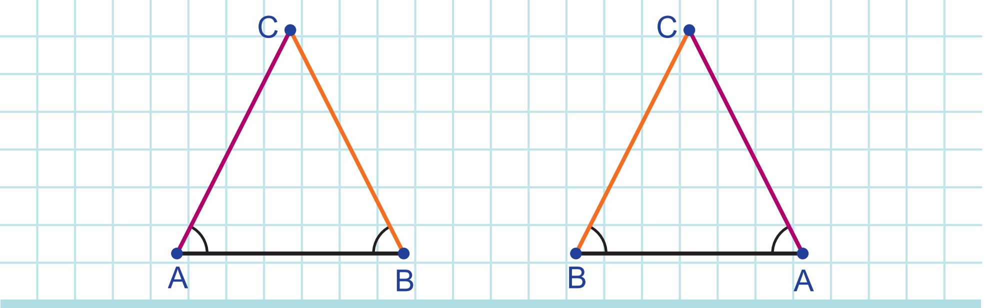
Հիմա համոզվենք, որ նախորդ կետում ներկայացված հավասարասրուն եռանկյան առաջին հատկության հակադարձ պնդումը ճիշտ է:

Թեորեմ: (Հավասարասրուն եռանկյան հայտանիշ) Եթե եռանկյան երկու անկյունները հավասար են, ապա այն հավասարասրուն եռանկյուն է:

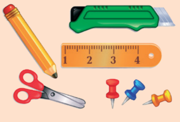
Ապացուցում: Ենթադրենք՝ ABC եռանկյան A և B անկյունները հավասար են: Ցույց տանք, որ $AC = BC$:

Դիտարկենք ABC և BAC եռանկյունները (նկ. 62):

Առաջին եռանկյան AB կողմը հավասար է երկրորդ եռանկյան BA կողմին: Բացի այդ, առաջին եռանկյան A անկյունը հավասար է երկրորդ եռանկյան B անկյանը, իսկ առաջին եռանկյան B անկյունը հավասար է երկրորդ եռանկյան A անկյանը: Հետևաբար, ըստ եռանկյունների հավասարության II հայտանիշի, այդ եռանկյունները հավասար են: Ուրեմն, որպես հավասար եռանկյունների հավասար անկյունների դիմացի կողմեր, $BC = AC$: Թեորեմն ապացուցված է:



Նկար 62



Թղթի ուղղանկյուն թերթը ծալելով ստացեք ա) հավասարասրուն եռանկյուն, բ) ուղղանկյուն հավասարասրուն եռանկյուն:

Հարցեր և առաջադրանքներ

150. Հավասարասրո՞ւն է ABC եռանկյունը, եթե $AB = 7$ սմ, $BC = 4$ սմ, $AC = 7$ սմ:

151. Գծեք հավասարասրուն եռանկյուն՝ այնպես, որ այն լինի ա) սուրանկյուն, բ) ուղղանկյուն, գ) բութանկյուն եռանկյուն:

152. Հավասարասրուն եռանկյան սրունքը 10 սմ է, իսկ հիմքը՝ 17 սմ: Գտեք այդ եռանկյան պարագիծը:

153. Հավասարասրուն եռանկյան հիմքը 4 սմ-ով մեծ է սրունքից, իսկ պարագիծը 37 սմ է: Գտեք եռանկյան կողմերը:

154. ABC հավասարակողմ եռանկյունում $AB = 15$ սմ: Գտեք այդ եռանկյան պարագիծը:

155. Հավասարակողմ եռանկյան պարագիծը 60 դմ է: Գտեք եռանկյան կողմը:

156. ABC եռանկյունում $AB = BC$, $\angle A = 40^\circ$: Գտեք $\angle C$-ն:

157. ABC եռանկյունում $AC = CB$, $\angle B = 63^\circ$: Գտեք A գագաթին հարակից արտաքին անկյունը:

158. AC հիմքով ABC հավասարասրուն եռանկյան BK բարձրությունը 11,7 սմ է: Ինչի՞ է հավասար եռանկյան B գագաթից տարված կիսորդը: Հնարավո՞ր է պատասխանել նույն հարցին, եթե եռանկյան հիմքը AB-ն է:

159. Հավասարասրուն եռանկյան հիմքին տարված են միջնագիծ և կիսորդ: Ինչի՞ է հավասար դրանց երկարությունների հարաբերությունը: Հնարավո՞ր է պատասխանել այդ հարցին, եթե միջնագիծն ու կիսորդը տարված են սրունքին:

160. BK-ն AC հիմքով հավասարասրուն եռանկյան բարձրությունն է, ընդ որում՝ $AK = 5,6$ սմ: Գտեք AC-ն:

161. BD-ն AC հիմքով հավասարասրուն եռանկյան միջնագիծն է, ընդ որում՝ $\angle ABD = 26^{\circ}$: Գտեք $\angle B$-ն:

162. ABC եռանկյունում $\angle A = \angle C$, $AB = 10$ սմ, $AC = 7$ սմ: Գտեք այդ եռանկյան պարագիծը:

163. ABC եռանկյունում, որի պարագիծը 29 սմ է, $\angle A = \angle C$: Գտեք AB կողմի երկարությունը, եթե $AC = 12$ սմ:

164. Հավասարասրուն եռանկյան սրունքը երկու անգամ մեծ է հիմքից, իսկ պարագիծը 75 սմ է: Գտեք եռանկյան կողմերը:

165. AB հիմքով ABC եռանկյան AC սրունքի վրա վերցրած է A_1 կետը, իսկ BC սրունքի վրա B_1 կետը, այնպես որ $\angle ABA_1 = \angle BAB_1$: Գտեք AA_1-ը, եթե $BB_1 = 10$ սմ:

166. Ապացուցեք, որ եթե եռանկյան կիսորդն ու բարձրությունը համընկնում են, ապա այդ եռանկյունը հավասարասրուն է:

167. Ապացուցեք, որ եթե եռանկյան միջնագիծն ու բարձրությունը համընկնում են, ապա եռանկյունը հավասարասրուն է:

168. Ապացուցեք, որ հավասարակողմ եռանկյան անկյունները հավասար են:

169. Ապացուցեք, որ հավասարակողմ եռանկյան անկյունները սուր են:

170. Ինչպես գիտեք, եթե երկու անկյուն կից են, ապա դրանց գումարը 180° է: Ճի՞շտ է արդյոք այդ պնդման հակադարձ պնդումը:

171. Ինչպես գիտեք, եթե երկու եռանկյուն հավասար են, ապա դրանց պարագծերը հավասար են: Ճի՞շտ է արդյոք այդ պնդման հակադարձ պնդումը:

172. A, B, C և D կետերը միևնույն ուղղի վրա են, ընդ որում՝ AB և

CD հատվածներն ունեն ընդհանուր միջնակետ: Ապացուցեք, որ եթե ABE եռանկյունը AB հիմքով հավասարասրուն եռանկյուն է, ապա CDE եռանկյունը նույնպես հավասարասրուն է:

§9. Եռանկյունների հավասարության երրորդ հայտանիշը

❐ 22. Ապացուցումը հակասող ենթադրությամբ

Հաճախ որևէ թեորեմ ապացուցելու համար ենթադրում են, որ նույն պայմանի դեպքում տեղի ունի թեորեմի եզրակացության ժխտումը: Հետո, հենվելով աքսիոմների ու արդեն ապացուցված թեորեմների վրա, դատողություններ անելով, հանգում են հակասության:

Դատողությունների արդյունքում ստացվածը, կարող է, օրինակ, հակասել թեորեմի պայմանին, կարող է հակասել որևէ աքսիոմի կամ որևէ թեորեմի: Այդպիսի հակասության ստացումով էլ ավարտվում է թեորեմի ապացուցումը: Ավարտվում է, քանի որ ստացված հակասությունը նշանակում է, որ արված ենթադրությունը չի կարող տեղի ունենալ: Հետևաբար, տեղի ունի արված ենթադրության ժխտումը՝ թեորեմի եզրակացությունը:

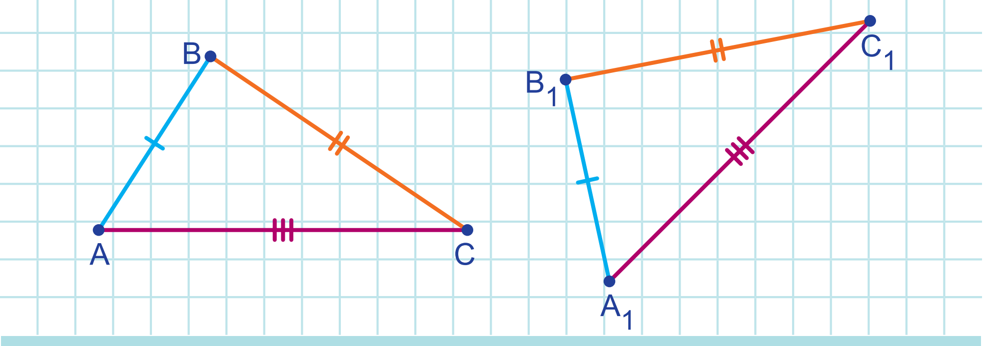
Ապացուցման այս եղանակը հաճախ է օգտագործվում թեորեմներ ապացուցելիս և ապացուցման խնդիրներ լուծելիս: Ապացուցման այս եղանակից օգտվելիս պետք է հետևել, որ պնդման եզրակացության ժխտումը թերի չլինի:

Օրինակ, ենթադրենք՝ ինչ-որ պայմանների դեպքում պետք է ապացուցել, որ a-ն մեծ է b-ից: a-ն մեծ է b-ից եզրակացության ժխտումը a-ն փոքր է b-իցը չէ, դա թերի է: Պետք է ենթադրել, որ a-ն փոքր է կամ հավասար b-ին: Եթե և $a<b$, և $a=b$ դեպքում դատողությունները բերում են հակասության, ապա ապացուցումն ավարտվում է, քանի որ պարզ է դառնում, որ a-ն չի կարող ոչ փոքր, և ոչ էլ հավասար լինել b-ին: Ուրեմն, a-ն մեծ է b-ից:

❒ 23. Եռանկյունների հավասարության երրորդ հայտանիշ

Թեորեմ: (Եռանկյունների հավասարության III հայտանիշ) Եթե մի եռանկյան երեք կողմերը համապատասխանաբար հավասար են մյուս եռանկյան երեք կողմերին, ապա այդ եռանկյունները հավասար են (նկ. 63):

Ապացուցում: Ենթադրենք՝ ABC և $A_1B_1C_1$ եռանկյուններում $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$ և $AC = A_1C_1$: Ապացուցենք, որ $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$:

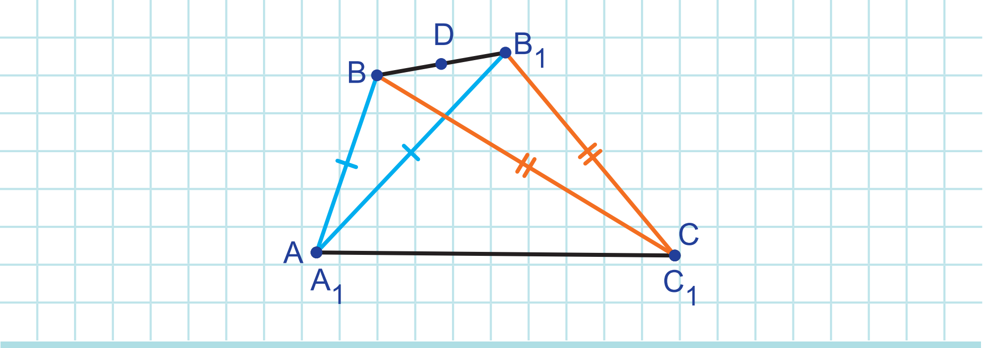


Նկար 63

Ենթադրենք հակառակը՝ այդ եռանկյունները հավասար չեն: Այդ դեպքում $\angle A \neq \angle A_1$: Իրոք, եթե այդ անկյունները հավասար լինեին, ապա ըստ եռանկյունների հավասարության I հայտանիշի (հիշենք, որ $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$) կունենայինք՝ $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$: Համանման ձևով կարող ենք համոզվել, որ $\angle B \neq \angle B_1$:

Վերադնենք ABC և $A_1B_1C_1$ եռանկյուններն այնպես, որ AC և A_1C_1 հավասար կողմերը համընկնեն, իսկ B և B_1 գագաթները գտնվեն A_1C_1 ուղղի միևնույն կողմում: Այդ դեպքում B և B_1 գագաթները չեն կարող համընկնել, քանի որ, ըստ ենթադրության՝ $\Delta ABC \neq \Delta A_1B_1C_1$: Բացի դրանից, քանի որ $\angle A \neq \angle A_1$, $\angle B \neq \angle B_1$, ապա B գագաթը չի կարող ընկած լինել ոչ A_1B_1 ճառագայթի, և ոչ էլ C_1B_1 ճառագայթի վրա (նկ. 64):

BB_1 հատվածի միջնակետը նշանակենք D-ով: Դիտարկենք A_1B_1B հավասարասրուն եռանկյունը: Այդ եռանկյան հիմքին տարված A_1D միջնագիծը կլինի նաև բարձրություն՝ $A_1D \perp BB_1$:

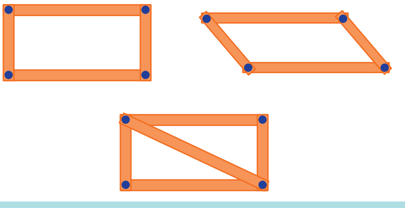


Նկար 64

Դիտարկելով C_1B_1B հավասարասրուն եռանկյունը՝ համանման դատողություններով կարելի է ցույց տալ, որ $C_1D \perp BB_1$: Ստացվում է, որ $\angle A_1DB = \angle C_1DB = 90^\circ$: Բայց այդ անկյունների DB կողմն ընդհանուր է, իսկ DA_1 և DC_1 կողմերը չեն կարող համընկնել, քանի որ D կետը չի կարող գտնվել A_1C_1 ուղղի վրա (B և B_1 կետերը գտնվում են A_1C_1 ուղղի միևնույն կողմում): Ուրեմն, դրանք հավասար լինել չեն կարող:

Ստացված հակասությունը նշանակում է, որ մեր ենթադրությունը, թե $\Delta ABC \neq \Delta A_1B_1C_1$, սխալ է: Ուրեմն, $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$: Թեորեմն ապացուցված է:

Եռանկյունների հավասարության երրորդ հայտանիշից հետևում է, որ եռանկյունը **կոշտ պատկեր** է՝ կողմերի երկարությունները միարժեք որոշում են դրա ձևը: Բայց, օրինակ, չորս ձողով պատրաստված շրջանակը կոշտ չէ (նկ. 65): Իսկ եթե դրան ավելացվի ևս մեկ ձող, ստեղծելով երկու եռանկյուն, ապա այն կդառնա կոշտ:



Նկար 65

Այս մոտեցումը լայնորեն կիրառվում է գործնականում՝ կառուցվածքների կոշտությունը, կայունությունն ապահովելու համար (նկ. 66):



Նկար 66

Ինտերակտիվ մոդել

Եռանկյունների հավասարության III հայտանիշը:

❒ 24. Երկրաչափական գծագրերի մասին

Երկրաչափական խնդիրների մեծ մասի լուծումը ուղեկցվում է գծագրով: Չնայած ասում են, որ երկրաչափությունը վատ գծագրով ճիշտ դատողություններ անելու արվեստ է, բայց կարևոր է, որ գծագիրը լինի «լավը»: Իսկ ո՞րն է «լավ» գծագիրը և ինչո՞վ է այն օգտակար:

«Լավ» գծագիր չի նշանակում գծագիր, որը արված է հատուկ գործիքներով և ամբողջությամբ համապատասխանում է խնդրի տվյալներին: Որոշակի հմտության դեպքում «լավ» գծագիր կարելի է անել նաև առանց այդ գործիքների՝ ձեռքով:

Գծագիրը «լավն» է, եթե այն բավականաչափ մեծ է և արտացոլում է խնդրում առկա կապերը, հարաբերություններն ու օրինաչափությունները:

Օրինակ, ուղղանկյուն եռանկյան գծագիրը պետք է ընկալվի որպես ուղղանկյուն եռանկյուն, իսկ հավասարասրուն եռանկյան գծագիրը՝ որպես հավասարասրուն եռանկյուն, եռանկյան միջնագիծը՝ որպես միջնագիծ և այլն:

Գծագիրը չպետք է ունենա օրինաչափություններ, որոնք չկան խնդրի տվյալներում: Օրինակ, եթե խնդրի եռանկյունը տարակողմ է, դրա գծագիրը չպետք է ընկալվի որպես հավասարասրուն կամ հավասարակողմ եռանկյուն: Կամ եթե խնդրում կետը հատվածի միջնակետ չէ, ապա գծագրում այն չպետք է ընկալվի որպես հատվածի միջնակետ և այլն:

Գծագրում պետք է նշված լինեն գծային և անկյունային մեծությունների տառային կամ թվային արժեքները:

Ընդունված պայմանական նշաններով գծագրում պետք է նշված լինեն հավասար հատվածները, հավասար անկյունները, ուղիղ անկյունները:

Իսկ ո՞րն է «լավ» գծագրի օգտակարությունը: Նախ, այն ճիշտ արտացոլելով եղած տվյալներն ու օրինաչափությունները՝ հնարավորություն է տալիս մտածել այն մասին, ինչ տեսնում ես: Հակառակ դեպքում պետք կլիներ լարել երևակայությունը՝ գծագրում մի բան տեսնելու և մեկ այլ բանի մասին մտածելու համար:

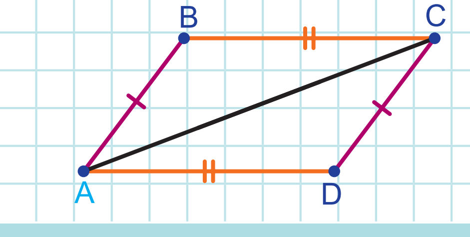
Երկրորդ, «լավ» գծագիրը հաճախ կարող է հուշել որոշ կապերի և օրինաչափությունների մասին, որոնք անհրաժեշտ են խնդիրը լուծելու համար:

Բայց այդ կապերն ու օրինաչափությունները չպետք է ընդունվեն որպես փաստեր, այլ պետք է ապացուցվեն, որովհետև գծագիրն ինքնին ոչինչ չի ապացուցում:

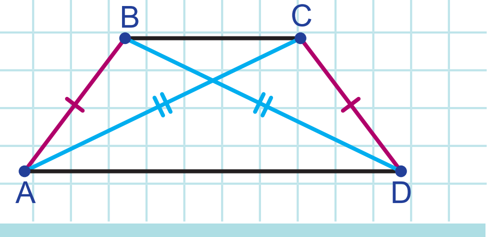
Հարցեր և խնդիրներ

173. ABC և PKL եռանկյուններում $AB = PK$, $BC = PL$, $AC = KL$: Հավասա՞ր են ABC և PKL եռանկյունները: Պատասխանը հիմնավորեք:

174. Նկար 67-ում $AB = CD$, $BC = AD$: Հավասա՞ր են ABC և ADC եռանկյունները: Պատասխանը հիմնավորեք:



Նկար 67

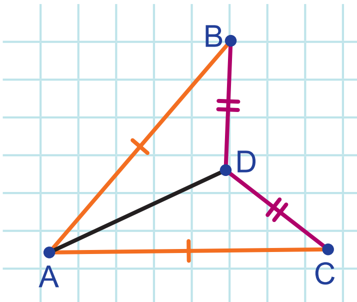


Նկար 68

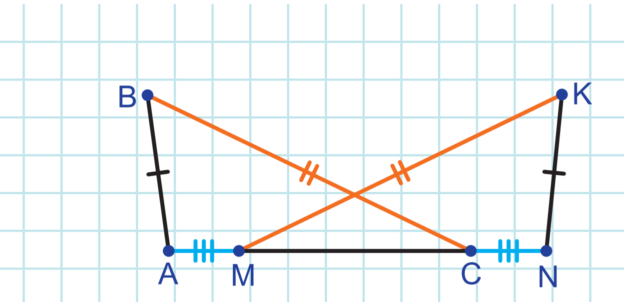
175. Նկար 68-ում $AB = CD$, $BD = AC$: Հավասա՞ր են ABC և DBC եռանկյունները: Պատասխանը հիմնավորեք:

176. Ապացուցեք, որ հավասարասրուն եռանկյան հիմքին տարված միջնագիծը նաև կիսորդ է ու բարձրություն:

177. Գտեք $\angle BAC$-ն, եթե $\angle CAD = 22^\circ$, $AB = AC$, $BD = DC$ (նկ. 69):



Նկար 69



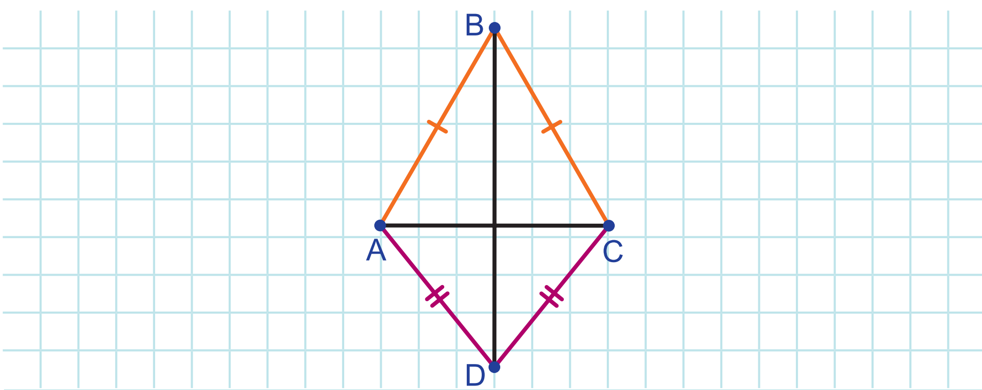
Նկար 70

178. Մի հավասարասրուն եռանկյան հիմքը և սրունքը համապատասխանաբար հավասար են մյուս եռանկյան հիմքին և սրունքին: Ապացուցեք, որ այդ եռանկյունները հավասար են:

179. Հավասար պարագծեր ունեցող ABC և $A_1B_1C_1$ եռանկյուններում $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$: Ապացուցեք, որ $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$:

180. Նկար 70-ում $AB = KN$, $BC = KM$, $AM = NC$: Ապացուցեք, որ $\angle BCA = \angle KMN$:

181. Նկար 71-ում $AB = BC$, $AD = DC$: Ապացուցեք, որ $BD \perp AC$:



Նկար 71

182. ABC և $A_1B_1C_1$ եռանկյունները հավասար են: Ապացուցեք, որ ABC եռանկյան կողմերի միջնակետերը միացնելուց առաջացած եռանկյունը հավասար է $A_1B_1C_1$ եռանկյան կողմերի միջնակետերը միացնելուց առաջացած եռանկյանը:

183. ABC և $A_1B_1C_1$ եռանկյուններում AD և A_1D_1 կիսորդները հավասար են: Բացի դրանից, $AB = A_1B_1$, $BD = B_1D_1$: Ապացուցեք, որ $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$:

184. Հակասող ենթադրության մեթոդով ապացուցեք, որ եթե $AB = 10$ սմ, $BC = 7$ սմ, $AC = 8$ սմ, ապա A, B, C կետերը մի ուղղի վրա չեն:

185. Հակասող ենթադրության մեթոդով ապացուցեք, որ եթե ABC եռանկյան BD կիսորդը բարձրություն չէ, ապա դրա AB և BC կողմերը հավասար չեն:

186. Հակասող ենթադրության մեթոդով ապացուցեք, որ կից անկյուններից գոնե մեկը փոքր չէ 90°-ից:

187. Ապացուցեք, որ սուրանկյուն եռանկյան բարձրության հիմքն ընկած է եռանկյան կողմի վրա:

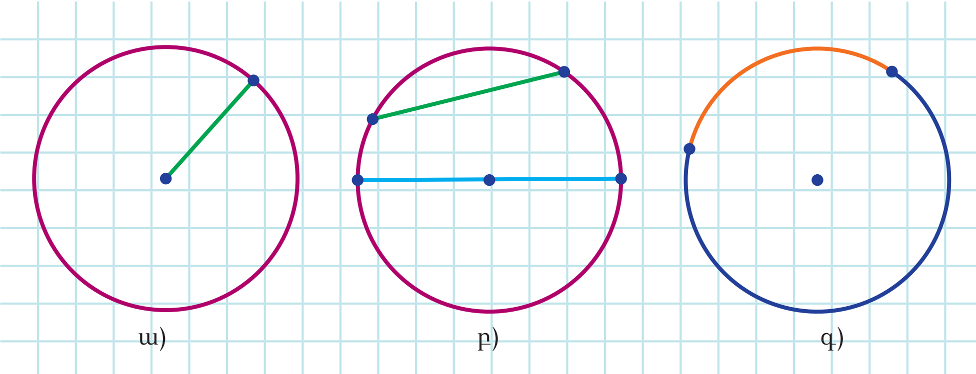
188. Ապացուցեք, որ բութանկյուն եռանկյան բութ անկյան գագաթից տարված բարձրության հիմքն ընկած է եռանկյան կողմի վրա, իսկ սուր անկյունների գագաթներից տարված բարձրությունների հիմքերն ընկած են կողմերի շարունակությունների վրա:

§10. Երկրաչափական կառուցումներ կարկինով և քանոնով

❒ 25. Շրջանագիծ, դրա տարրերը

Սահմանում: Շրջանագիծ է կոչվում այն երկրաչափական պատկերը, որը կազմված է հարթության բոլոր այն կետերից, որոնք տրված կետից տրված հեռավորության վրա են:
Տրված կետը կոչվում է շրջանագծի կենտրոն: Կենտրոնը շրջանագծի որևէ կետին միացնող հատվածը կոչվում է շրջանագծի շառավիղ (նկ. 72 ա):

Սովորաբար շրջանագծի կենտրոնը նշանակում են O տառով, շառավիղը՝ r կամ R տառով: Շրջանագծի շառավղի երկարությունը նույնպես նշանակում են r կամ R տառով:



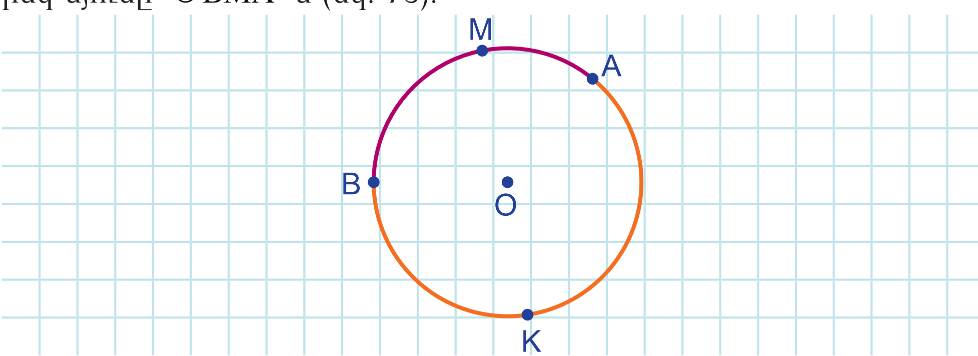
Նկար 72

Սահմանում: Շրջանագծի երկու կետը միացնող հատվածը կոչվում է լար: Շրջանագծի կենտրոնով անցնող լարը կոչվում է տրամագիծ (նկ. 72բ):

Սովորաբար շրջանագծի տրամագծի երկարությունը նշանակում են d տառով: Ակնհայտ է, որ $d = 2R$: Շրջանագծի լարը նշանակում են իր ծայրակետերով:

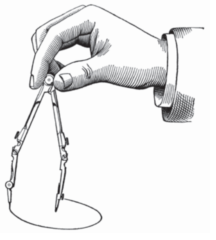
Սահմանում: Շրջանագծի՝ երկու կետով սահմանափակված մասը կոչվում է շրջանագծի աղեղ (նկ. 72գ):

Շրջանագծի աղեղը նշանակելու համար օգտագործում են նշանը՝ $\cup$ և դրա ծայրակետերի անունները: Քանի որ շրջանագծի երկու կետերը շրջանագիծը տրոհում են երկու աղեղի, հաճախ, որոշակիության համար, աղեղի նշանակման մեջ ավելացնում են աղեղի ևս մեկ կետ: Օրինակ, A և B ծայրակետերով աղեղներից մեկը $\cup BKA$-ն է, իսկ մյուսը՝ $\cup BMA$-ն (նկ. 73):

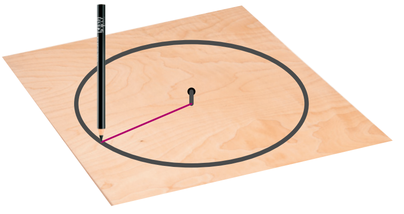


Նկար 73

Շրջանագիծ գծելու համար օգտվում են կարկինից (նկ. 74): Տախտակի վրա շրջանագիծ գծել կարելի է նաև առանց կարկինի: Դրա համար պետք է թելի մի ծայրը ամրացնել տախտակի վրա ամրացված մեխին, իսկ մյուս ծայրը՝ գրչի կամ մատիտի ծայրին (նկ. 75):

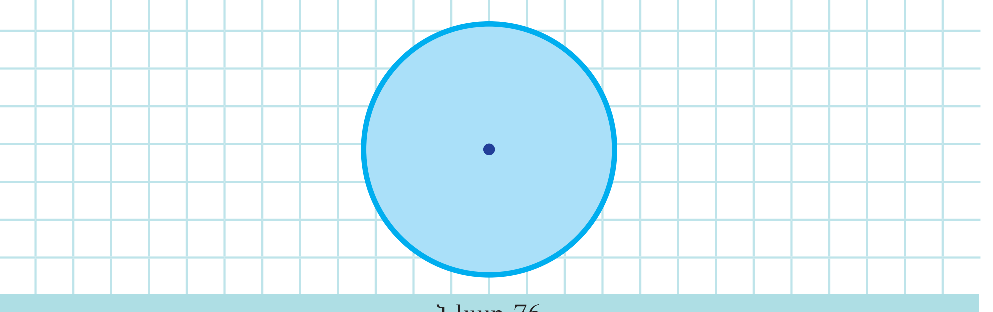


Նկար 74



Նկար 75

Սահմանում: Շրջանագիծը և դրանով սահմանափակված հարթության մասը միասին կոչվում են շրջան (նկ. 76):



Նկար 76

Ինտերակտիվ մոդել

Շրջանագիծ

Դինամիկ մաթեմատիկա

1. Դինամիկ մաթեմատիկայի ծրագրով կառուցեք ֆիքսված երկարությամբ AB հատված: B ծայրակետի համար ընտրեք «Հետք է թողնում» հատկությունը: Դանդաղ պտտեք B կետը: Ի՞նչ պատկեր է ստացվում:

2. Դինամիկ մաթեմատիկայի ծրագրով կառուցեք ֆիքսված երկարությամբ AB հատված: Հատվածի և B կետի համար ընտրեք «Հետք է թողնում» հատկությունը: Դանդաղ պտտեք B կետը: Ի՞նչ պատկեր է ստացվում:

3. Դինամիկ մաթեմատիկայի ծրագրով կառուցեք A կենտրոնով շրջանագիծ և նրա վրա նշեք C, D, E կետերը: Չափեք AC, AD, AE հատվածների երկարությունները և համեմատեք դրանք: Շարժեք C կետը: Փոխվո՞ւմ է AC հատվածի երկարությունը:

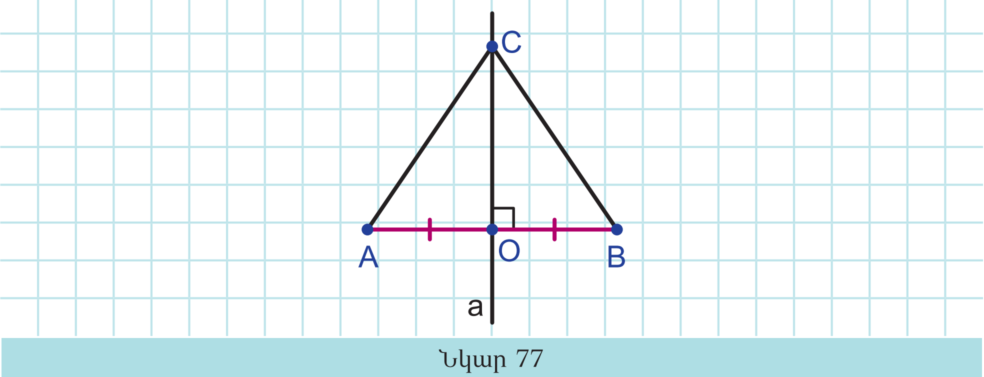
❒ 26. Հատվածի միջնուղղահայացը

Սահմանում: Հատվածի միջնակետով անցնող և դրան ուղղահայաց ուղիղը կոչվում է հատվածի միջնուղղահայաց:

Թեորեմ: Հատվածի միջնուղղահայացի ամեն մի կետ հավասարահեռ է հատվածի ծայրակետերից:

Ապացուցում: Ենթադրենք՝ O կետը AB հատվածի միջնակետն է, իսկ a ուղիղը՝ միջնուղղահայացը: Պարզ է, որ $AO = OB$:

Վերցնենք a ուղղի՝ O-ից տարբեր որևէ C կետ ու դա միացնենք A և B կետերին (նկ. 77):



Նկար 77

Դիտարկենք AOC և BOC եռանկյունները:

Քանի որ a ուղիղը AB հատվածի միջնուղղահայացն է, ապա $AO = OB$, $\angle AOC = \angle BOC = 90^\circ$: CO–ն այդ եռանկյունների ընդհանուր կողմն է: Հետևաբար, ըստ եռանկյունների հավասարության I հայտանիշի՝ $\Delta AOC = \Delta BOC$: Վերջինից էլ հետևում է, որ $AC = BC$, այսինքն, C կետը հավասարահեռ է AB հատվածի ծայրակետերից: Թեորեմն ապացուցված է:

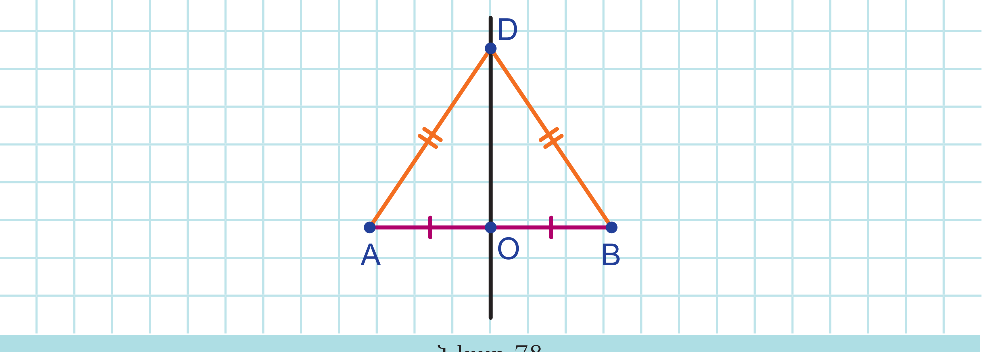
Ճիշտ է նաև հակադարձ թեորեմը.

Թեորեմ: Հատվածի ծայրակետերից հավասարահեռ ամեն մի կետ պատկանում է այդ հատվածի միջնուղղահայացին:

Ապացուցում: Ենթադրենք՝ O կետը AB հատվածի միջնակետն է: Պարզ է, որ O–ն պատկանում է AB հատվածի միջնուղղահայացին:

Ենթադրենք՝ O–ից տարբեր D կետը այնպիսին է, որ $AD = BD$:

D կետը միացնենք A, B և O կետերին և դիտարկենք ADB եռանկյունը (նկ. 78):



Նկար 78

Այդ եռանկյունը հավասարասրուն է $(AD = BD)$ և DO հատվածը դրա հիմքին տարված միջնագիծն է: Ուրեմն, այն նաև բարձրություն է: Այսպիսով, DO ուղիղը անցնում է AB հատվածի միջնակետով և ուղղահայաց է դրան: Դա էլ նշանակում է, որ D կետը պատկանում է AB հատվածի միջնուղղահայացին: Թեորեմն ապացուցված է:

❐ 27. Կառուցումներ կարկինով և քանոնով

Մինչև հիմա մենք արել ենք ինչ-որ կառուցումներ և գծագրեր, դրանց համար օգտագործելով մասշտաբային քանոն, անկյունաքանոն, անկյունաչափ:

Բայց երկրաչափության դպրոցական դասընթացում առանձնակի տեղ են զբաղեցնում կարկինով և քանոնով կառուցումները: Կան խնդիրներ, որտեղ պահանջվում է կառուցումներն անել միայն քանոնով կամ միայն կարկինով: Եթե կառուցման խնդրում այլ բան չի ասվում, ապա խոսքը կարկինով և քանոնով կառուցման մասին է:

Կառուցման խնդիրներում քանոն ասելով հասկանում են մասշտաբային բաժանումներ չունեցող քանոն: Դրանով կարելի է գծել ինչ-որ ուղիղ, կամ ուղիղ, որն անցնում է տրված երկու կետով: Հասկանալի է, որ կարելի է գծել տրված ծայրակետերով հատված, տրված սկզբնակետով ճառագայթ, կամ տրված սկզբնակետով և տրված կետով անցնող ճառագայթ:

Կարկինով կարելի է գծել շրջանագիծ ինչպես կամայական կենտրոնով և շառավղով, այնպես էլ տրված կենտրոնով և տրված հատվածին հավասար շառավղով:

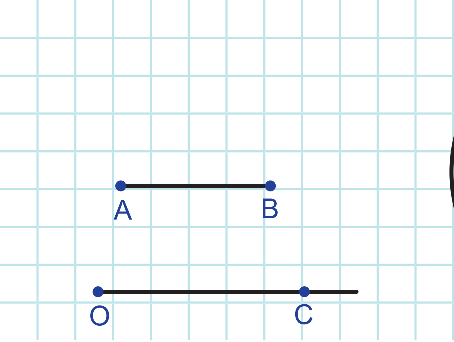
Լուծել կառուցման խնդիրը նշանակում է նշել այն քայլերի հաջորդականությունը, որոնց արդյունքում ստացվում է պահանջվող հատկություններով պատկեր, և ապացուցել, որ կառուցված պատկերը բավարարում է խնդրի պահանջին:

Ավելի բարդ խնդրի լուծումը ենթադրում է այլ էտապներ ևս: Դրանց մասին կխոսենք հետագայում: Այժմ միայն նշենք, որ պահանջվող հատկություններով պատկերը կարող է լինել միակը, կարող է լինել մեկից ավելին, հնարավոր է նաև, որ այսպիսի պատկեր գոյություն չունենա:

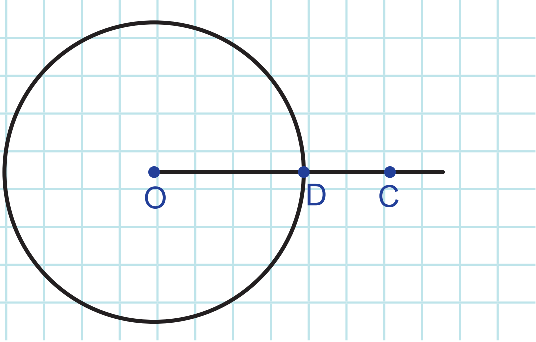
Դիտարկենք կառուցման մի պարզագույն խնդիր:

Խնդիր: Տրված ճառագայթի վրա դրա սկզբնակետից տեղադրեք տրված հատվածին հավասար հատված:

Լուծում: Ենթադրենք տրված են AB հատվածը և OC ճառագայթը (նկ. 79): Կարկինին տանք AB հատվածին հավասար բացվածք և կառուցենք O կենտրոնով շրջանագիծ (նկ. 80): Շրջանագծի և OC ճառագայթի հատման կետը թող լինի D-ն: OD հատվածն էլ կլինի որոնելին:



Նկար 79

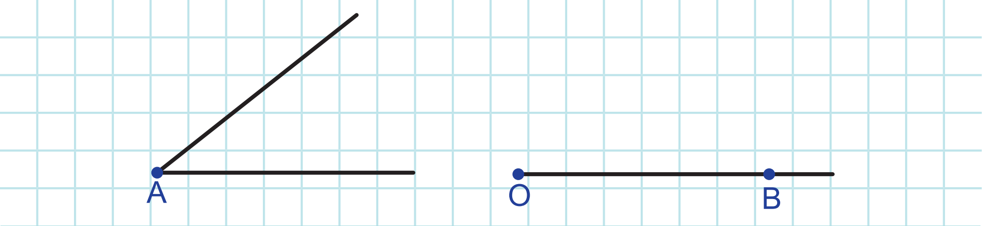


Նկար 80

❒ 28. Կառուցման խնդիրների օրինակներ

Խնդիր 1: Կառուցեք տրվածին հավասար անկյուն, որի մի կողմը համընկնի տրված ճառագայթին:

Լուծում: Ենթադրենք՝ տրված են A անկյունը և OB ճառագայթը (նկ. 81):



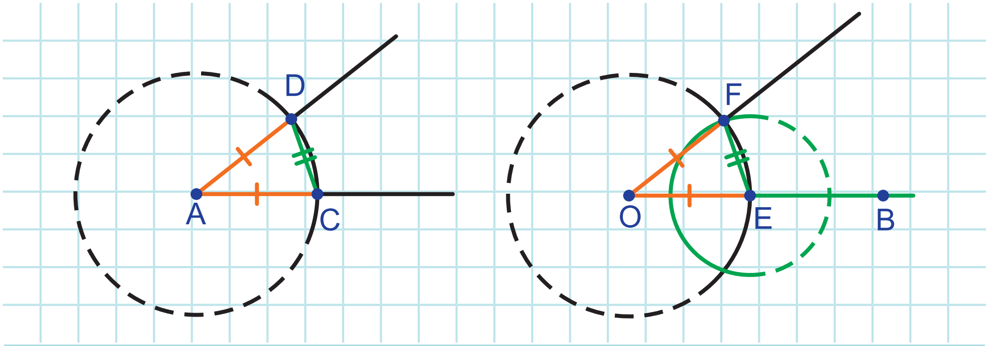
Նկար 81

Կարկինին տանք որևէ բացվածք և կառուցենք այդ շառավղով երկու շրջանագիծ՝ մեկը A կենտրոնով, մյուսը՝ O կենտրոնով: Դրանցից առաջինի և A անկյան կողմերի հատման կետերը թող լինեն C-ն և D-ն, իսկ երկրորդի և OB ճառագայթի հատման կետը՝ E-ն (նկ. 82):

Հիմա կարկինին տանք DC հատվածին հավասար բացվածք և կառուցենք E կենտրոնով շրջանագիծ: O և E կենտրոններով շրջանագծերի հատման կետերից մեկը նշանակենք F-ով և կառուցենք OF ճառագայթը (նկ. 82):

Ապացուցենք, որ FOB անկյունը հավասար է A անկյանը, այսինքն, որոնելին է:

Դիտարկենք ACD և OEF եռանկյունները:



Նկար 82

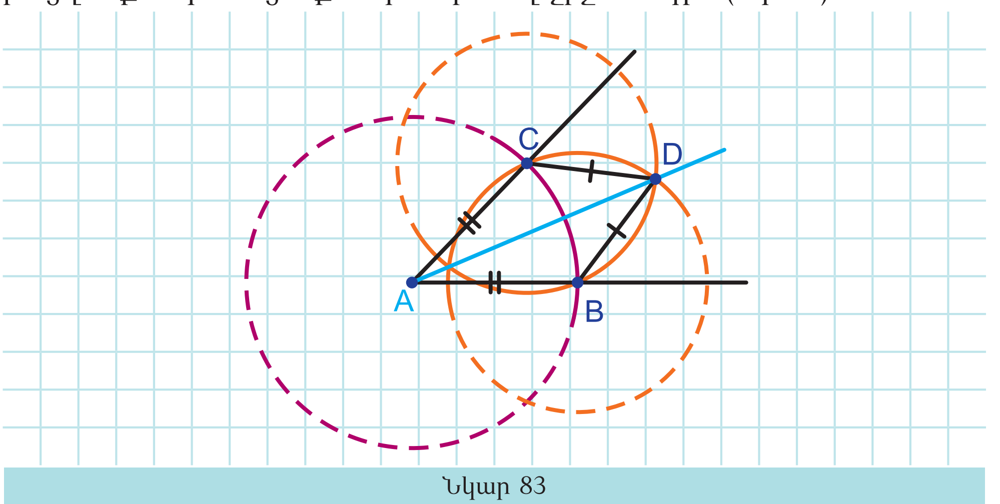
AC, AD, OE և OF հատվածները հավասար են կարկինի առաջին բացվածքին: Հետևաբար, $AC = AD = OE = OF$: Հավասար են նաև CD և EF հատվածները, քանի որ դրանք հավասար են կարկինի երկրորդ բացվածքին: Այսպիսով, այդ եռանկյունների երեք կողմերը համապատասխանաբար հավասար են: Ուրեմն, $\Delta ACD = \Delta OEF$: Եվ որպես հավասար եռանկյունների հավասար կողմերի դիմացի անկյուններ՝ $\angle FOB = \angle A$:

Ինտերակտիվ մոդել

Տրված անկյանը հավասար անկյան կառուցումը

Խնդիր 2: Կառուցեք տրված անկյան կիսորդը:

Լուծում: Ենթադրենք՝ տրված է A անկյունը: Կարկինին տանք որևէ բացվածք և կառուցենք A կենտրոնով շրջանագիծ (նկ. 83):



Նկար 83

Այդ շրջանագծի և A անկյան կողմերի հատման կետերը նշանակենք B–ով և C–ով:

Հիմա կարկինին տանք BC հատվածին հավասար բացվածք և կառուցենք երկու շրջանագիծ՝ մեկը B կենտրոնով, մյուսը՝ C: Այդ շրջանագծերի հատման՝ անկյան ներսի կետը թող լինի D–ն: Կառուցենք AD ճառագայթը:

Ապացուցենք, որ AD ճառագայթը A անկյան կիսորդն է:

Դիտարկենք ACD և ABD եռանկյունները:

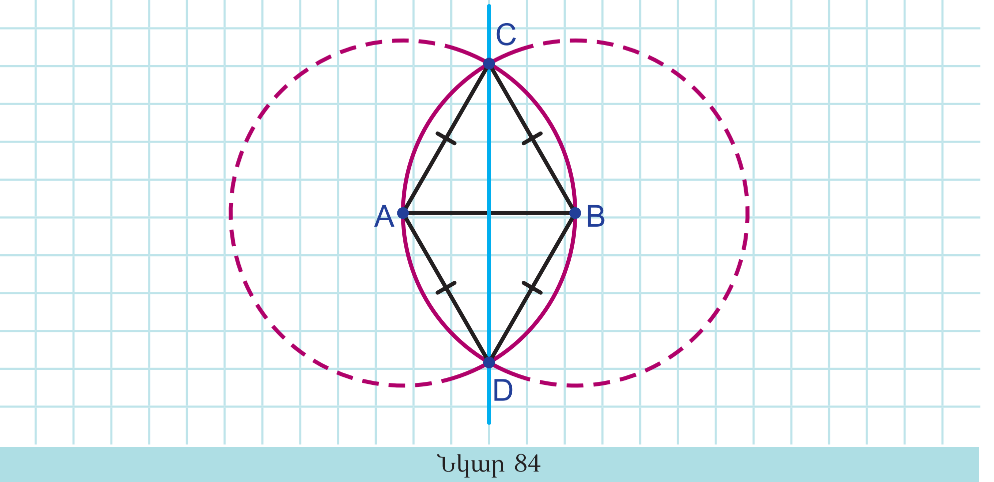
Այդ եռանկյունների երկու կողմերը՝ AC–ն և AB–ն հավասար են, քանի որ նույն շրջանագծի շառավիղներն են: Հավասար են նաև CD–ն և BD–ն, քանի որ, ըստ կառուցման, դրանք հավասար են BC–ին: Բացի դրանից, այդ եռանկյունների երրորդ կողմը՝ AD–ն, ընդհանուր է: Ուրեմն, ըստ եռանկյունների հավասարության III հայտանիշի, $\Delta ACD = \Delta ABD$: Եվ որպես հավասար եռանկյունների՝ հավասար կողմերի դիմացի անկյուններ՝ $\angle CAD = \angle BAD$: Հետևաբար, AD–ն A անկյան կիսորդն է:

Ինտերակտիվ մոդել

Անկյան կիսորդի կառուցումը

Խնդիր 3: Կառուցեք տրված հատվածի միջնուղղահայացը:

Լուծում: Ենթադրենք՝ տրված է AB հատվածը: Կարկինին տանք AB հատվածին հավասար բացվածք և կառուցենք A և B կենտրոններով երկու շրջանագիծ (նկ. 84):



Նկար 84

Այդ շրջանագծերի հատման կետերը նշանակենք C–ով և D–ով: Կառուցենք CD ուղիղը:

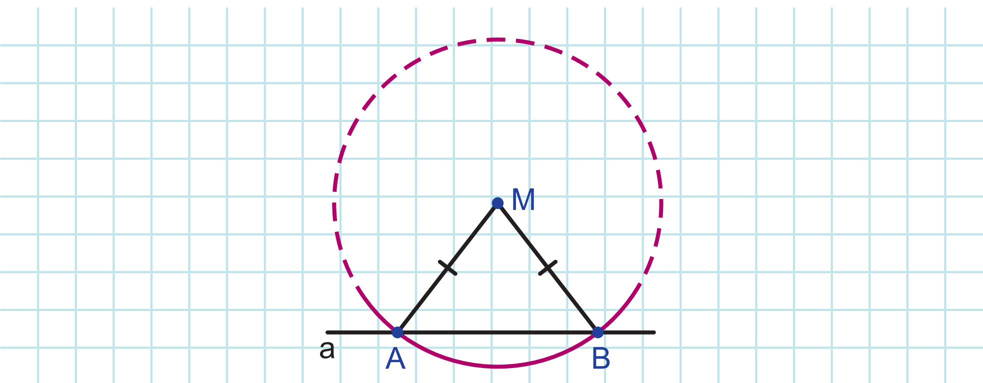
Ապացուցենք, որ CD ուղիղը AB հատվածի միջնուղղահայացն է:

Ըստ կառուցման՝ $AC = BC = AD = BD$: Հետևաբար, և C, և D կետը հավասարահեռ է AB հատվածի ծայրակետերից: Ուրեմն, ըստ կետ 26–ի երկրորդ թեորեմի, C և D կետերը պատկանում են AB հատվածի միջնուղղահայացին: Մյուս կողմից, ըստ կետ 2–ի **2º** հատկության, երկու կետով անցնող ուղիղը միակն է: Հետևաբար, CD ուղիղը AB հատվածի միջնուղղահայացն է:

Խնդիր 4: Կառուցեք տրված կետով անցնող և տրված ուղղին ուղղահայաց ուղիղ:

Լուծում: Ենթադրենք՝ տրված է a ուղիղը և դրան չպատկանող M կետը: Կառուցենք M կենտրոնով մի շրջանագիծ, որը երկու կետում հատի a ուղիղը: Այդ կետերը թող լինեն A–ն և B–ն (նկ. 85):

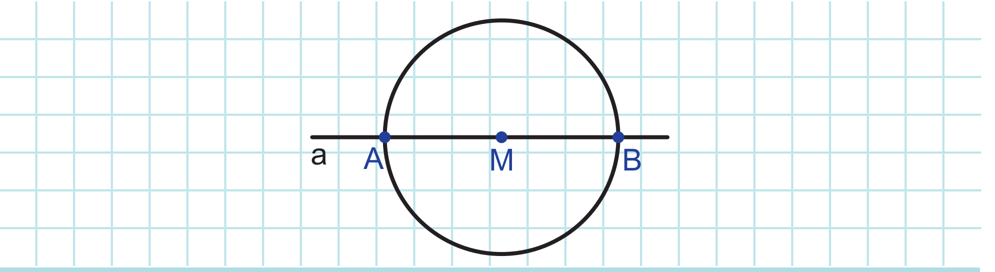
Պարզ է, որ M կետը հավասարահեռ է AB հատվածի ծայրակետերից: Հետևաբար, ըստ կետ 26–ի երկրորդ թեորեմի, M–ը պատկանում է AB հատվածի միջնուղղահայացին: Ուրեմն, մնում է կրկնել խնդիր 3–ի քայլերը՝ կառուցել AB հատվածի միջնուղղահայացը: Այն կանցնի M կետով և ուղղահայաց կլինի a ուղղին:



Նկար 85

Դիտարկենք նաև այն դեպքը, երբ M կետը պատկանում է a ուղղին:

Կարկինին տանք կամայական բացվածք և կառուցենք M կենտրոնով շրջանագիծ: Շրջանագծի հատման կետերը a ուղղի հետ նշանակենք A–ով և B–ով (նկ. 86):



Նկար 86

Պարզ է, որ M կետը կլինի AB հատվածի միջնակետը: Հետևաբար, կառուցելով AB հատվածի միջնուղղահայացը (տես խնդիր 3-ի լուծումը), կստանանք որոնելի ուղիղը:

Ինտերակտիվ մոդել

Տրված ուղղին ուղղահայաց ուղղի կառուցումը

Դինամիկ մաթեմատիկա

1. Դինամիկ մաթեմատիկայի ծրագրով, օգտվելով «Կտավի» ցանցից, կառուցեք C ուղիղ անկյունով ABC եռանկյուն: Չափեք եռանկյան C անկյունը: Կամայական ձևով տեղաշարժեք եռանկյան գագաթները և հետևեք C անկյան մեծությանը: Պահպանվո՞ւմ է դրա մեծությունը:

2. Դինամիկ մաթեմատիկայի ծրագրով կառուցեք AB ուղիղ: «Ուղղահայաց ուղիղ» գործիքով A կետով տարեք AB ուղղին ուղղահայաց ուղիղ: Կառուցեք ուղղանկյուն եռանկյուն և չափեք դրա ուղիղ անկյունը: Շարժեք եռանկյան գագաթները: Գագաթների տեղաշարժը փոխո՞ւմ է եռանկյան տեսակը:

3. Դինամիկ մաթեմատիկայի ծրագրով կառուցեք AB հիմքով ABC հավասարասրուն եռանկյուն: Չափեք սրունքների երկարությունները: Շարժեք եռանկյան գագաթները և հետևեք չափված հատվածների երկարություններին:
Պահպանվո՞ւմ է եռանկյան հավասարասրուն լինելը: Եթե ոչ, ապա ձևափոխեք կառուցումն այնպես, որ գագաթները տեղաշարժելիս

եռանկյունը մնա հավասարասրուն: Հաջողության հասնելուց հետո փորձեք գտնել կառուցման նոր տարբերակ:

Հարցեր և խնդիրներ

189. A և B կետերը O կենտրոնով շրջանագծի վրա են: Համեմատեք OA և OB հատվածները: Պատասխանը հիմնավորեք:

190. A կետի հեռավորությունը շրջանագծի կենտրոնից 7 սմ է, իսկ շրջանագծի շառավիղը՝ 6 սմ: A կետը պատկանու՞մ է այդ շրջանագծին: Պատասխանը հիմնավորեք:

191. A և B կետերը O կենտրոնով շրջանագծի վրա են: Ինչպիսի՞ն է AOB եռանկյունը: Պատասխանը հիմնավորեք:

192. A և B կետերը O կենտրոնով շրջանագծի վրա են: Գտեք OAB անկյունը, եթե OBA անկյունը 36° է:

193. O կենտրոնով շրջանագծի AB լարի երկարությունը հավասար է շրջանագծի շառավղին: Ինչպիսի՞ն է AOB եռանկյունը: Պատասխանը հիմնավորեք:

194. Շրջանագծի շառավիղը 7,1 սմ է: Գտեք այդ շրջանագծի տրամագիծը:

195. Ուղիղն անցնում է հատվածի միջնակետով: Կարելի՞ է պնդել, որ այն այդ հատվածի միջնուղղահայացն է:

196. Հատվածի ինչ-որ կետով անցնող ուղիղն ուղղահայաց է դրան: Կարելի՞ է պնդել, որ այդ ուղիղը հատվածի միջնուղղահայացն է:

197. Հատվածի միջնուղղահայացի ինչ-որ կետի հեռավորությունը հատվածի ծայրակետերից մեկից 8,6 սմ է: Ինչքա՞ն է այդ կետի հեռավորությունը հատվածի մյուս ծայրակետից: Պատասխանը հիմնավորեք:

198. AB հատվածի միջնուղղահայացի ինչ-որ կետ ընդունելով որպես կենտրոն՝ գծվել է շրջանագիծ, որն անցնում է A կետով: Այդ շրջանագիծն անցնու՞մ է B կետով: Պատասխանը հիմնավորեք:

199. O կենտրոնով շրջանագծի AB և CD լարերը հավասար են: Ապացուցեք, որ $\Delta COD = \Delta AOB$:

200. Ապացուցեք, որ եթե շրջանագծի լարը տրամագիծ չէ, ապա դրա միջնակետով անցնող շառավիղը ուղղահայաց է այդ լարին:

201. AB և CD հատվածներն O կենտրոնով շրջանագծի տրամագծեր են: Գտեք AOD եռանկյան պարագիծը, եթե հայտնի է, որ $CB = 13$ սմ, $AB = 16$ սմ:

202. Ապացուցեք, որ հավասարասրուն եռանկյան հիմքին տարված միջնագիծը պատկանում է հիմքի միջնուղղահայացին:

203. Կառուցեք տրված հատվածի միջնակետը:

204. Կառուցեք տրված հատվածից երկու անգամ մեծ հատված:

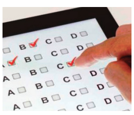
205. Կառուցեք տրված անկյունից երկու անգամ մեծ անկյուն:

206. Տրված անկյունը բաժանեք չորս հավասար անկյան:

207. Կառուցեք տրված եռանկյան միջնագծերը:

208. Կառուցեք անկյուն, որը հավասար է տրված անկյունների տարբերությանը:

209. Կառուցեք տրված եռանկյան որևէ բարձրություն:



Համակարգչային թեմատիկ թեստ

Ներբեռնման հղումը՝ https://mathnet.am/etest/7-2.zip

Լրացուցիչ խնդիրներ

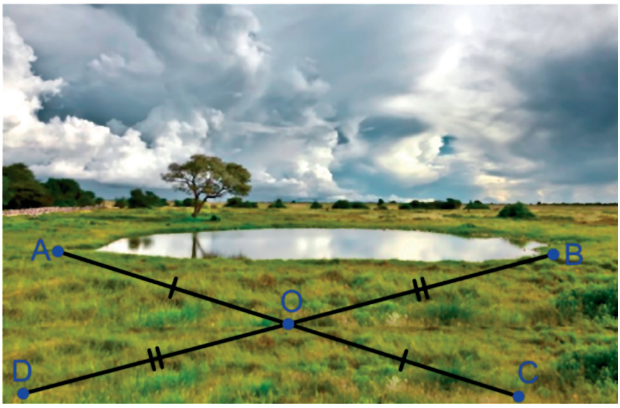
210. Եռանկյունը, որի պարագիծը 24 սմ է, բարձրությամբ բաժանվել է երկու եռանկյան, որոնց պարագծերը 12 սմ և 20 սմ են: Գտեք բարձրության երկարությունը:

211. ABC եռանկյան պարագիծը 47 սմ է: Գտեք եռանկյան կողմերը, եթե BC կողմը մեծ է AB կողմից 3 սմ-ով և AC կողմից փոքր է 5 սմ-ով:

212. Ապացուցեք, որ, եթե մի ուղղանկյուն եռանկյան էջերը համապատասխանաբար հավասար են մյուսի էջերին, ապա այդ եռանկյունները հավասար են:

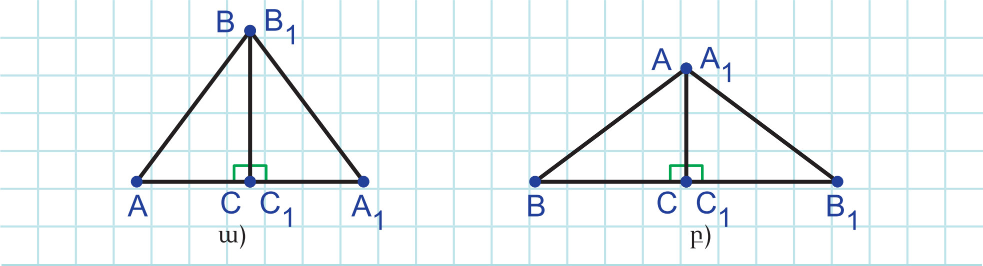
213. Ապացուցեք, որ հավասարակողմ եռանկյան կողմերի միջնակետերը մեկ այլ հավասարակողմ եռանկյան գագաթներ են:

214. Լճի AB լայնությունը գտնելու համար արվել են նկար 87-ում ներկայացված կառուցումները: Ո՞ր հատվածը պետք է չափել լճի լայնությունն իմանալու համար և ինչո՞ւ:



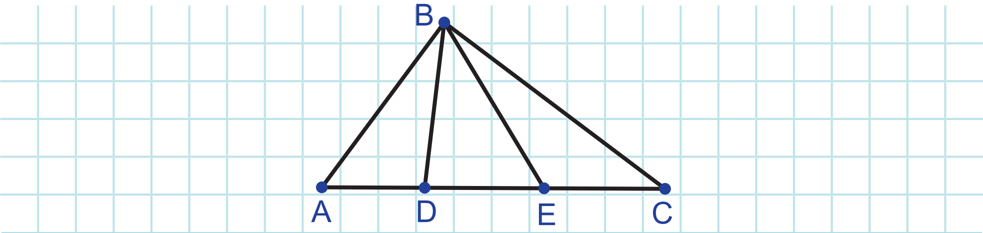
Նկար 87

215. ABC և $A_1B_1C_1$ հավասար եռանկյուններում $BC = B_1C_1 = 4$ սմ, $AC = A_1C_1 = 3$ սմ, $\angle C = \angle C_1 = 90^{\circ}$: Այդ եռանկյուններից կազմել են երկու նոր եռանկյուն, ինչպես ցույց է տրված նկար 88 ա) –ում և բ)–ում: Հավասա՞ր են նոր եռանկյունները: Պատասխանը հիմնավորեք:



Նկար 88

216. ADB, ACB և AEB անկյունները դասավորեք աճման կարգով (նկ. 89):



Նկար 89

217. M կետը ABC եռանկյան ներսում է: Ապացուցեք, որ BMC անկյունը մեծ է BAC անկյունից:

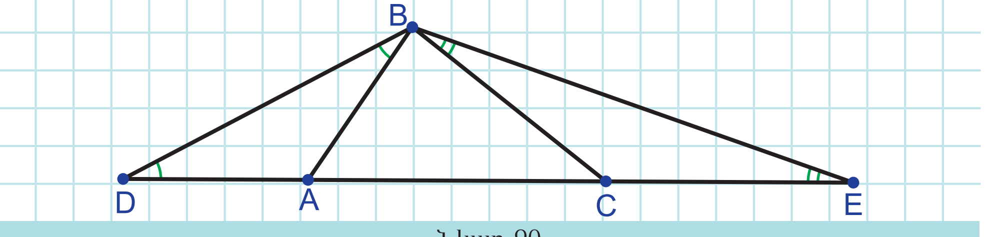
218. Կարո՞ղ են եռանկյան երկու գագաթներին հարակից արտաքին անկյունները լինել սուր:

219. Հնարավո՞ր է արդյոք տարակողմ եռանկյունը բաժանել երկու հավասար եռանկյունների: Պատասխանը հիմնավորեք:

220. Ապացուցեք, որ միևնույն ուղղին ուղղահայաց ուղիղները չեն հատվում:

221. ABC եռանկյան BK կիսորդը նաև բարձրություն է: Գտեք ABC եռանկյան պարագիծը, եթե $P_{ABK} = 12$ սմ, $BK = 4$ սմ:

222. Նկար 90-ում $\angle DBA = \angle BDA$, $\angle CBE = \angle BEC$: Գտեք ABC եռանկյան պարագիծը, եթե $DE = 50$ սմ:



Նկար 90

223. Ապացուցեք, որ հավասարասրուն եռանկյան հիմքի գագաթներից տարված կիսորդները հավասար են:

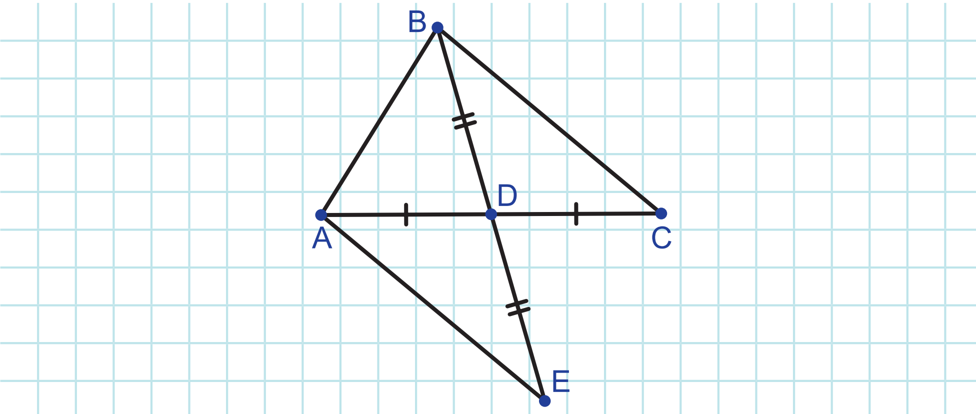
224. Ապացուցեք, որ հավասարասրուն եռանկյան հիմքի գագաթներից տարված միջնագծերը հավասար են:

225. Ապացուցեք, որ հավասարասրուն եռանկյան հիմքին առընթեր անկյունները սուր են:

226. AC հիմքով ABC հավասարասրուն եռանկյան AM և CK կիսորդները հատվում են O կետում: Ապացուցեք, որ AOC եռանկյունը հավասարասրուն է:

227. AB հիմքով ABC հավասարասրուն եռանկյունում տարված են AD և BE միջնագծերը: ABC եռանկյան պարագիծը 110 սմ է, իսկ ACD եռանկյան պարագիծը 10 սմ-ով մեծ է ABE եռանկյան պարագծից: Գտեք ABC եռանկյան կողմերը:

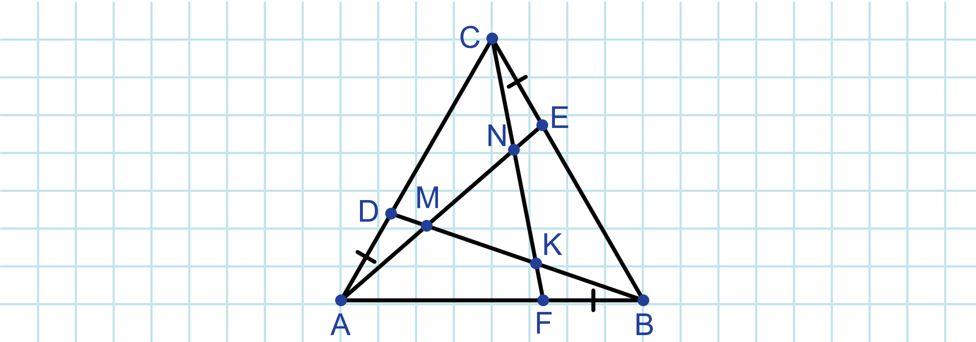
228. Նկար 91-ում $AD = DC$, $BD = DE$: Ապացուցեք, որ $\angle AEB = \angle EBC$:



Նկար 91

229. Ապացուցեք, որ եթե եռանկյան միջնագիծը նաև կիսորդ է, ապա այդ եռանկյունը հավասարասրուն եռանկյուն է:

230. ABC հավասարակողմ եռանկյան կողմերի վրա նշված են D, E և F կետերը, ինչպես ցույց է տրված նկար 92–ում: Ընդ որում՝ $AD = BF = CE$: Ապացուցեք, որ $\Delta ABD = \Delta BCF = \Delta CAE$:



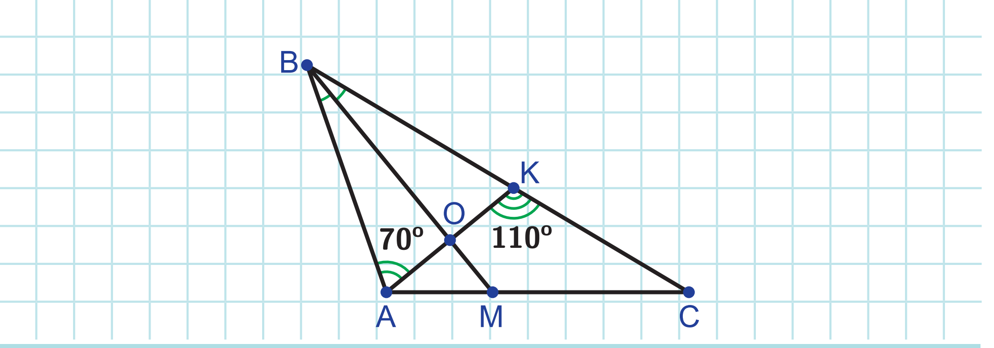
Նկար 92

231. ABC հավասարակողմ եռանկյան կողմերի վրա նշված են D, E և F կետերը, ինչպես ցույց է տրված նկար 92–ում: Ընդ որում՝ $AD = BF = CE$: Ապացուցեք, որ $\Delta ADM = \Delta CEN$:

232. ABC հավասարակողմ եռանկյան կողմերի վրա նշված են D, E և F կետերը, ինչպես ցույց է տրված նկար 92–ում: Ընդ որում՝ $AD = BF = CE$: Ապացուցեք, որ MNK եռանկյունը հավասարակողմ է:

233. Ապացուցեք, որ եթե ABC եռանկյունը հավասար անկյուններ չունի, ապա այն տարակողմ եռանկյուն է:

234. BM–ը ABC եռանկյան կիսորդն է (նկ. 93): $\angle BAK = 70^{o}$, $\angle AKC = 110^{o}$: Ապացուցեք, որ $BM \perp AK$:



Նկար 93

235. Ապացուցեք, որ հավասարակողմ եռանկյան միջնագծերը հավասար են:

236. Բերեք թեորեմի օրինակ, որի հակադարձ պնդումը ճիշտ է:

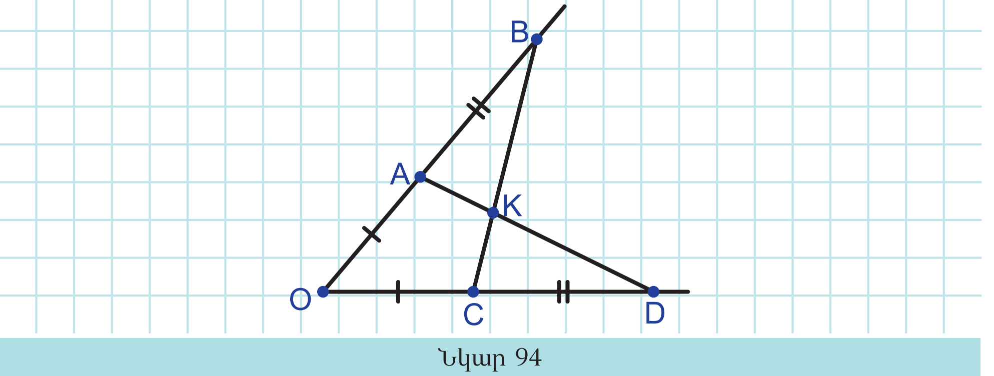
237. Բերեք ճիշտ պնդման օրինակ, որի հակադարձ պնդումը սխալ է:

238. ABC եռանկյան AK միջնագիծը հավասար է BC կողմի կեսին: Ապացուցեք, որ $\angle A = \angle B + \angle C$:

239. AB–ն շրջանագծի տրամագիծ է: Այդ շրջանագծի BC և AD լարերը հավասար են և AB տրամագծի տարբեր կողմերում են: Ապացուցեք, որ CD լարը նույնպես տրամագիծ է:

240. ABC եռանկյունում $BC = 12$ սմ: AB կողմի միջնուղղահայացը AC կողմը հատում է D կետում: Գտեք AC կողմի երկարությունը, եթե BCD եռանկյան պարագիծը 27 սմ է:

241. Ապացուցեք, որ ա) $\Delta OBC = \Delta ODA$, բ) $\Delta ABK = \Delta CDK$, գ) OK–ն O անկյան կիսորդն է, եթե $OA = OC$, $AB = CD$ (նկ. 94):



Նկար 94

242. Տրված է 13°-ի անկյուն: Կառուցեք 1°-ի անկյուն:

243. Տրված է 17°-ի անկյուն: Կառուցեք 11°-ի անկյուն:

244. Կառուցեք տրված հատվածին հավասար կողմով հավասարակողմ եռանկյուն:

245. Ապացուցեք, որ շրջանագծի AB և BC լարերի միջնուղղահայացները հատվում են շրջանագծի կենտրոնում:

246. Տրված է շրջանագիծ, բայց չի նշված դրա կենտրոնը: Կառուցեք այդ շրջանագծի կենտրոնը:

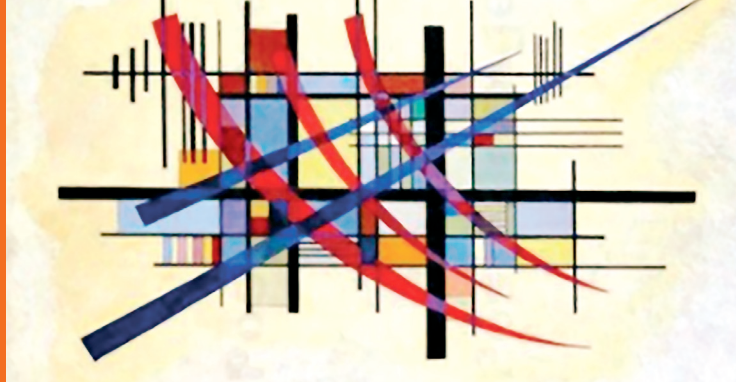
247. Տրված են a և b հատվածները, ընդ որում՝ $a < b$: b հատվածը բաժանեք երկու մասի այնպես, որ դրանցից մեկը մյուսից մեծ լինի a-ով:

248. Տրված տարակողմ եռանկյունը գագաթներից մեկով անցնող ուղղով բաժանեք հավասար պարագծեր ունեցող եռանկյունների:

Ուսումնասիրելով այս գլուխը՝

- Իմացաք, թե որ հատվածն է կոչվում եռանկյան միջնագիծ, որը կիսորդ և որը բարձրություն:
- Սովորեցիք եռանկյունների հավասարության հայտանիշները, կիրառեցիք դրանք խնդիրներ լուծելիս:
- Իմացաք, թե ինչպես են դասակարգվում եռանկյունները:
- Սովորեցիք հավասարասրուն եռանկյան հատկություններն ու հայտանիշը, եռանկյան արտաքին անկյան հատկությունը, կիրառեցիք դրանք խնդիրներ լուծելիս:
- Իմացաք, թե որ ուղիղն է կոչվում հատվածի միջնուղղահայաց, ինչ հատկություն ունի այն:
- Իմացաք, թե ինչ կառուցվածք ունի թեորեմը, ինչպես ձևակերպել տրված պնդման հակադարձ պնդումը, ինչ է պնդման հերքումը:
- Ծանոթացաք պնդումներ ապացուցելու հակասող ենթադրության մեթոդին, կիրառեցիք այն ապացուցման խնդիրներ լուծելիս:
- Սովորեցիք կարկինով ու քանոնով կառուցել տրված հատվածին և անկյանը հավասար հատված և անկյուն, հատվածի միջնակետը, անկյան կիսորդը:

Գլուխ III



ԶՈՒԳԱՀԵՌ ՈՒՂԻՂՆԵՐ

Ուսումնասիրելով այս գլուխը՝

- Կիմանաք զուգահեռ ուղիղների սահմանումը, հատկություններն ու հայտանիշները:
- Կսովորեք այդ հատկություններն ու հայտանիշները կիրառել խնդիրներ լուծելիս:
- Կիմանաք զուգահեռ ուղիղների աքսիոմն ու դրա հետևանքները, կկիրառեք դրանք խնդիրներ լուծելիս:

§11. Ուղիղների զուգահեռության հայտանիշները

❐ 29. Զուգահեռ ուղիղների սահմանումը

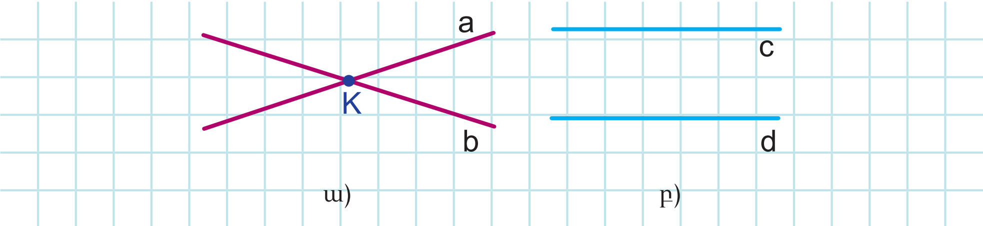
Հիշեցում: Հարթաչափությունն ուսումնասիրելիս, մասնավորապես, ամեն մի սահմանման, աքսիոմի, թեորեմի, խնդրի դեպքում ենթադրվում է, որ դիտարկվող երկրաչափական պատկերները ինչ-որ մի հարթության վրա են:

Այս գլխի շարադրանքի համար վերևի հիշեցումը առավել կարևոր է:

Ինչպես գիտեք, ուղիղները կարող են ունենալ մեկ ընդհանուր կետ՝ հատվել կամ ընդհանուր կետ չունենալ:

Սահմանում: Չհատվող ուղիղները կոչվում են զուգահեռ ուղիղներ:

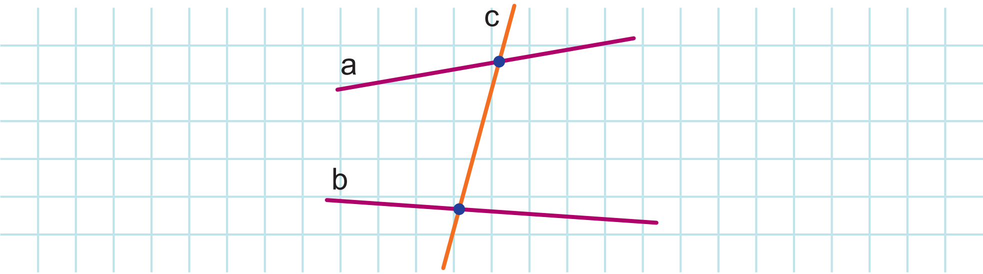
Նկար 95 ա)-ի a և b ուղիղները հատվում են K կետում, իսկ 95 բ)-ի c և d ուղիղները զուգահեռ են: Ուղիղների զուգահեռությունը գրվում է այսպես. c || d :



Նկար 95

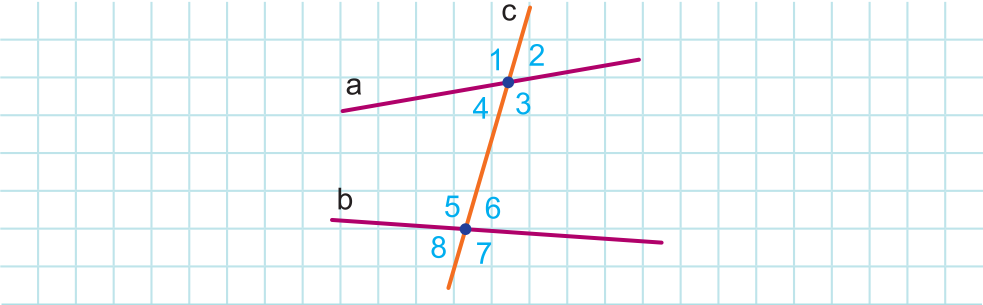
Երկու հատվածներ կոչվում են զուգահեռ, եթե զուգահեռ ուղիղների վրա են: Երկու ճառագայթի, ճառագայթի և ուղղի, հատվածի և ուղղի, հատվածի և ճառագայթի զուգահեռությունը սահմանվում է համանման ձևով:

Սահմանում: a և b ուղիղներից ամեն մեկի հետ միայն մեկ ընդհանուր կետ ունեցող c ուղիղը կոչվում է a և b ուղիղների հատող (նկ. 96):



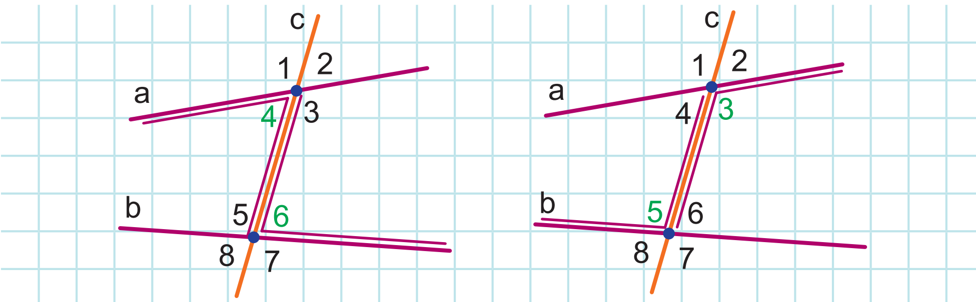
Նկար 96

Ենթադրենք՝ c ուղիղը a և b ուղիղների հատողն է: Առաջացած ութ անկյունները նշանակենք թվերով (նկ. 97):



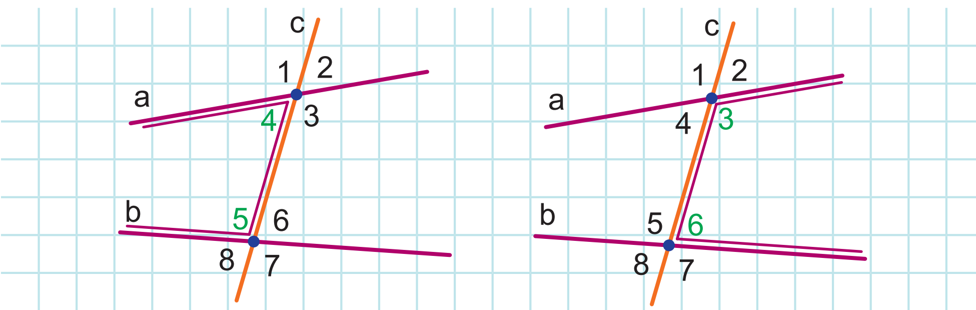
Նկար 97

Այդ անկյունների որոշ զույգեր ունեն հատուկ անուններ: 4 և 6, 3 և 5 անկյունների զույգերը կոչվում են **խաչադիր անկյուններ** (նկ. 98):



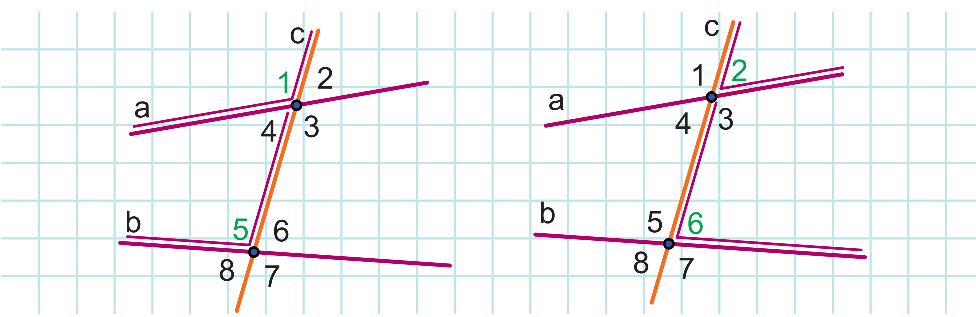
Նկար 98

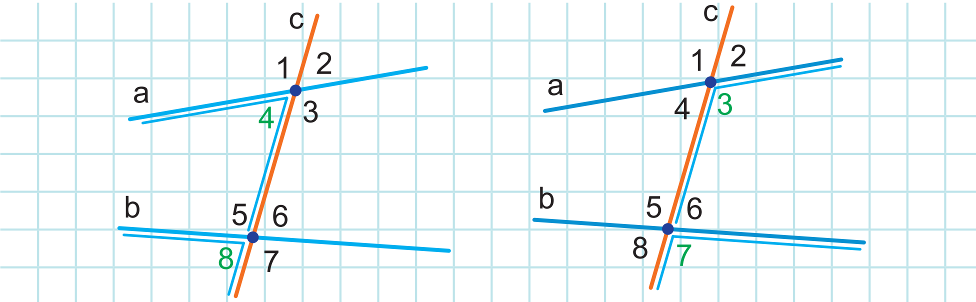
4 և 5, 3 և 6 անկյունների զույգերը կոչվում են **միակողմանի անկյուններ** (նկ. 99):



Նկար 99

1 և 5, 2 և 6, 4 և 8, 3 և 7 անկյունների զույգերը կոչվում են **համա-դիր (համապատասխան) անկյուններ** (նկ. 100):





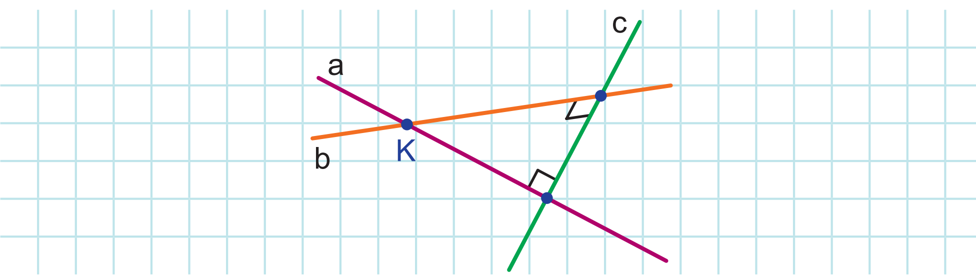
Նկար 100

❒ 30. Ուղիղների զուգահեռության հայտանիշները

Թեորեմ: Եթե երկու ուղիղներ ուղղահայաց են երրորդին, ապա այդ ուղիղները զուգահեռ են:

Ապացուցում: Ենթադրենք՝ a և b ուղիղները ուղղահայաց են c ուղղին: Ապացուցենք, որ $a \parallel b$:

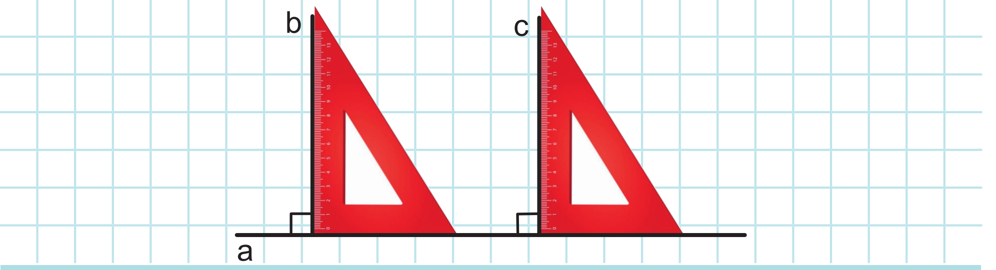
Ենթադրենք հակառակը, այսինքն՝ a և b ուղիղները հատվում են K կետում (նկ. 101): Այդ դեպքում կստացվի, որ K կետից c ուղղին տարված է երկու ուղղահայաց:



Նկար 101

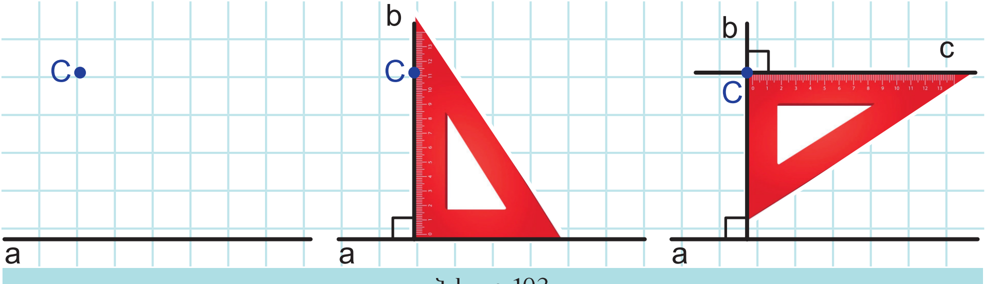
Բայց տրված կետից ուղղին կարելի է տանել միայն մեկ ուղղահայաց (տե՛ս կետ 18-ը): Ստացված հակասությունը նշանակում է, որ a և b ուղիղների հատվելու ենթադրությունը սխալ է: Ուրեմն, դրանք չեն հատվում, այսինքն, զուգահեռ են: Թեորեմն ապացուցված է:

Ապացուցված թեորեմը հուշում է, թե ինչպես տանել զուգահեռ ուղիղներ: Հուշում է նաև թե ինչպես տրված ուղղին չպատկանող կետով այդ ուղղին զուգահեռ ուղիղ տանել: Առաջինն անելու համար կարելի է անկյունաքանոնով որևէ ուղղի տանել ուղղահայացներ (նկ. 102): b և c ուղիղները, ըստ վերևում ապացուցված թեորեմի, կլինեն զուգահեռ:



Նկար 102

Երկրորդն անելու քայլերը ներկայացված են նկար 103-ում: Քանի որ նման կառուցման դեպքում a և c ուղիղները ուղղահայաց են b ուղղին, ապա $a \parallel b$:



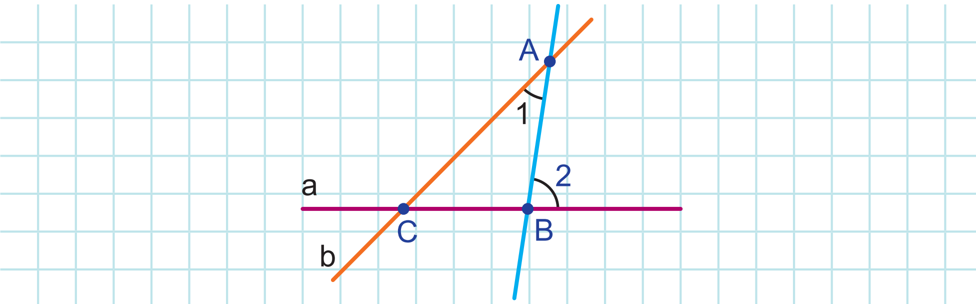
Նկար 103

Ապացուցենք ուղիղների զուգահեռության ևս երեք հայտանիշ: Դրանց ձևակերպումներում կօգտվենք նախորդ կետում ներմուծված խաչադիր, միակողմանի և համադիր անկյուններ հասկացություններից:

Թեորեմ: Եթե երկու ուղիղներ հատողով հատելիս խաչադիր անկյունները հավասար են, ապա այդ ուղիղները զուգահեռ են:

Ապացուցում: Ենթադրենք՝ a և b ուղիղները AB հատողով հատելիս խաչադիր անկյունները հավասար են: Ապացուցենք, որ $a \parallel b$:

Ենթադրենք հակառակը՝ a և b ուղիղները հատվում են C կետում (նկ. 104):

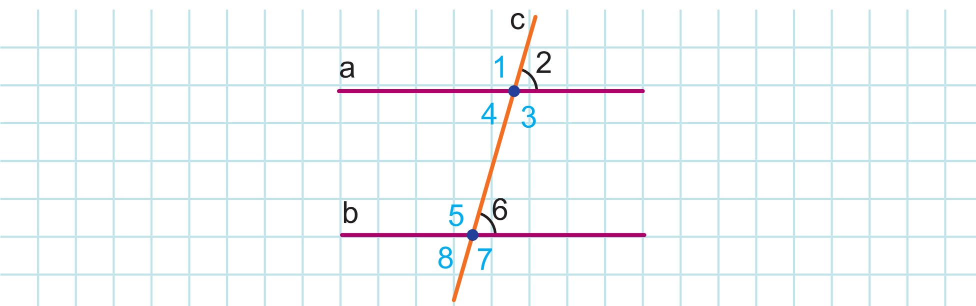


Նկար 104

Դիտարկենք ABC եռանկյունը: Անկյուն 2-ը ABC եռանկյան արտաքին անկյունն է: Հետևաբար, այն մեծ է ABC եռանկյան իրեն ոչ կից անկյուններից, մասնավորապես, անկյուն 1-ից: Բայց, ըստ պայմանի, $\angle 1 = \angle 2$: Ստացված հակասությունը նշանակում է, որ a և b ուղիղների հատվելու ենթադրությունը սխալ է: Ուրեմն, $a \parallel b$: Թեորեմն ապացուցված է:

Թեորեմ: Եթե երկու ուղիղներ հատողով հատելիս համադիր անկյունները հավասար են, ապա այդ ուղիղները զուգահեռ են:

Ապացուցում: Ենթադրենք՝ a և b ուղիղները c հատողով հատելիս, օրինակ, 2 և 6 համադիր անկյունները հավասար են՝ $\angle 2 = \angle 6$ (նկ. 105): Ապացուցենք, որ $a \parallel b$:



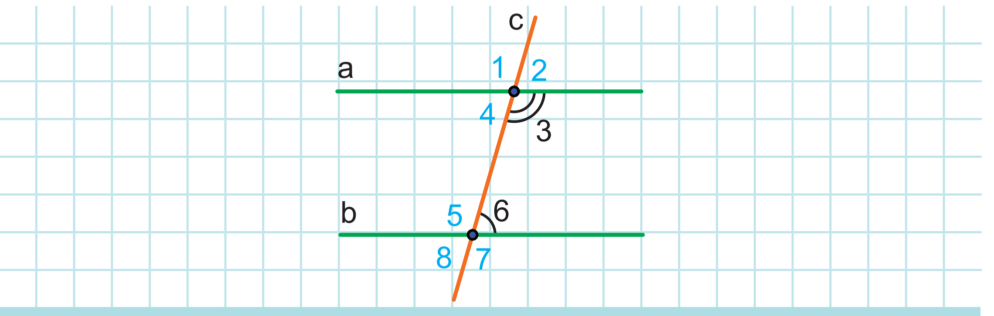
Նկար 105

Քանի որ 2 և 4 անկյունները հակադիր անկյուններ են, ապա $\angle 4 = \angle 2$: Իսկ ըստ պայմանի՝ $\angle 2 = \angle 6$: Ուրեմն, $\angle 4 = \angle 6$: Բայց անկյուն 4-ը և անկյուն 6-ը a և b ուղիղները c հատողով հատելիս առաջացած խաչադիր անկյուններ են: Քանի որ դրանք հավասար են, ապա, ըստ նախորդ թեորեմի, $a \parallel b$: Թեորեմն ապացուցված է:

Ձևակերպենք և ապացուցենք ուղիղների զուգահեռության ևս մեկ հայտանիշ:

Թեորեմ: Եթե երկու ուղիղներ հատողով հատելիս միակողմանի անկյունների գումարը 180° է, ապա այդ ուղիղները զուգահեռ են:

Ապացուցում: Ենթադրենք՝ a և b ուղիղները c հատողով հատելիս, օրինակ, 3 և 6 միակողմանի անկյունների գումարը 180° է՝ $\angle 3 + \angle 6 = 180^\circ$ (նկ. 106): Ապացուցենք, որ $a \parallel b$:



Նկար 106

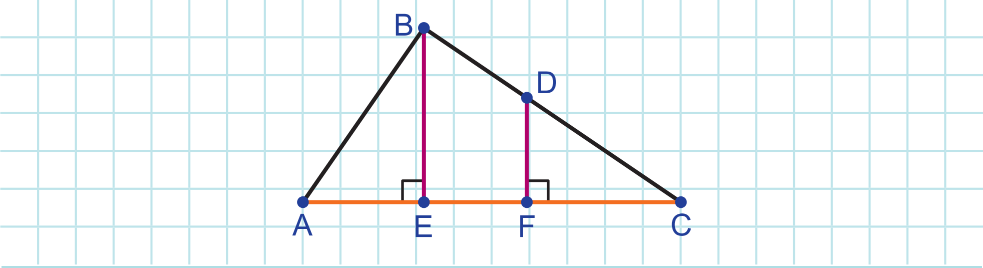
Քանի որ 3 և 2 անկյունները կից անկյուններ են, ապա $\angle 2 = 180^\circ - \angle 3$: Բացի դրանից, ըստ պայմանի, $\angle 3 + \angle 6 = 180^\circ$: Հետևաբար, $\angle 6 = 180^\circ - \angle 3$: Ուրեմն, $\angle 2 = \angle 6$: Բայց անկյուն 2-ը և անկյուն 6-ը a և b ուղիղները c հատողով հատելիս առաջացած համադիր անկյուններ են: Քանի որ դրանք հավասար են, ապա, ըստ նախորդ թեորեմի, $a \parallel b$: Թեորեմն ապացուցված է:

Հարցեր և խնդիրներ

249. a և b ուղիղները չեն հատվում: Ինչպե՞ս են կոչվում այդպիսի ուղիղները:

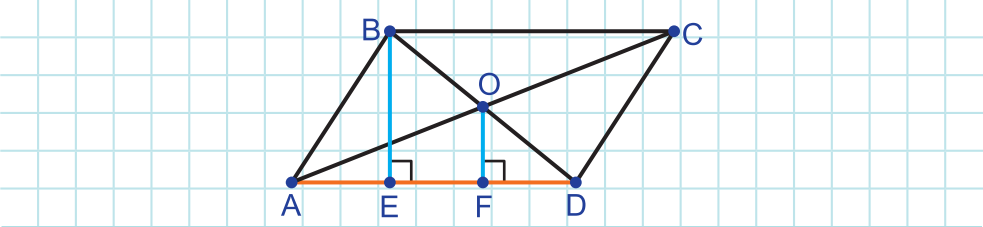
250. Հայտնի է, որ a և b ուղիղները զուգահեռ են: Կարո՞ղ են դրանք ունենալ ընդհանուր կետ:

251. Նկար 107-ում $BE \perp AC$, $DF \perp AC$: Զուգահե՞ռ են BE և DF ուղիղները: Պատասխանը հիմնավորեք:



Նկար 107

252. Նկար 108-ում $BE \perp AD$, $OF \perp AD$: Զուգահե՞ռ են BE և OF ուղիղները: Պատասխանը հիմնավորեք:



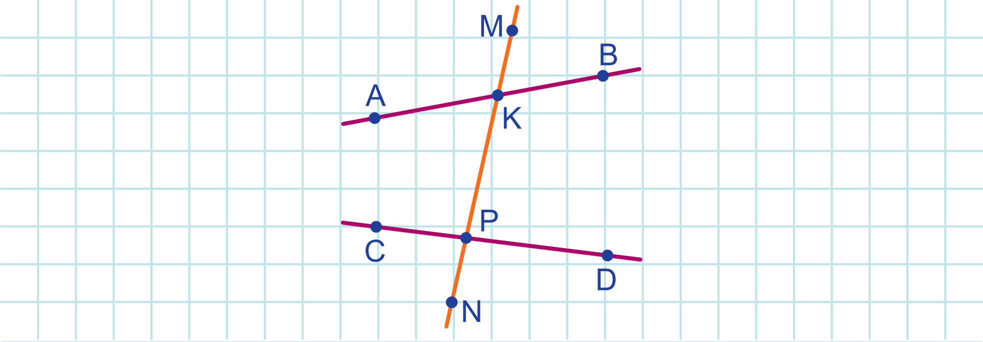
Նկար 108

253. AB և CD ուղիղները հատվել են MN ուղղով (նկ. 109): Նշեք.

ա) խաչադիր անկյունների երկու զույգ,

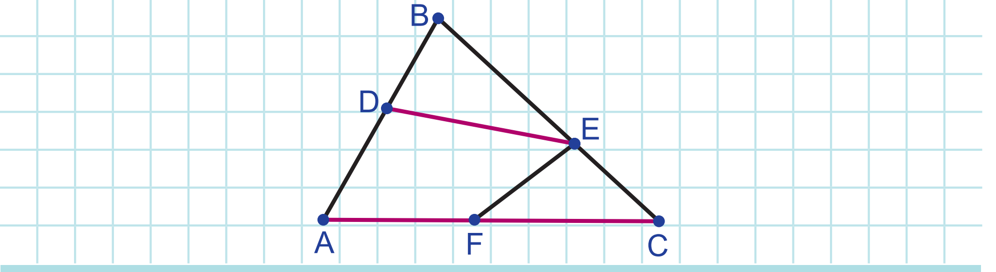
բ) համադիր անկյունների երկու զույգ,

գ) միակողմանի անկյունների երկու զույգ:



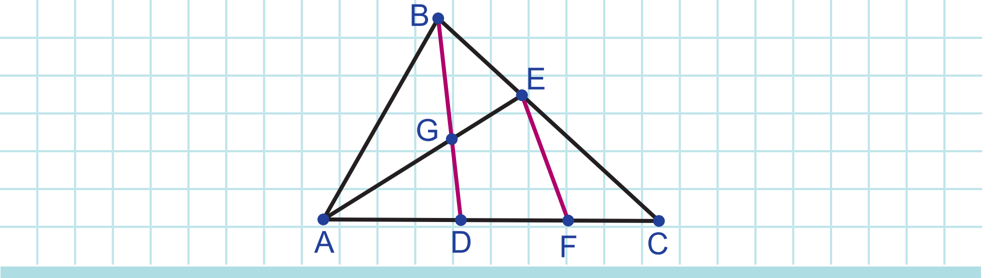
Նկար 109

254. Նկար 110-ում գտեք DE և AC ուղիղները AB, BC, EF հատողներից որևէ մեկով հատելիս առաջացած խաչադիր, միակողմանի, համադիր անկյունների մեկական զույգ:



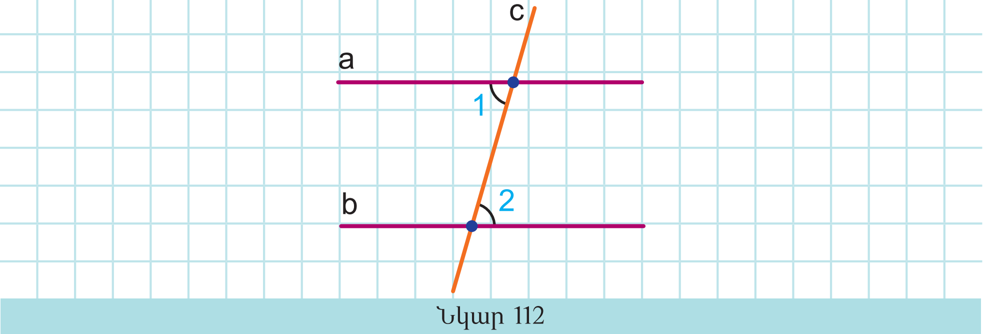
Նկար 110

255. Նկար 111-ում գտեք BD և EF ուղիղները AE, AC հատողներից որևէ մեկով հատելիս առաջացած խաչադիր, միակողմանի, համադիր անկյունների մեկական զույգ:



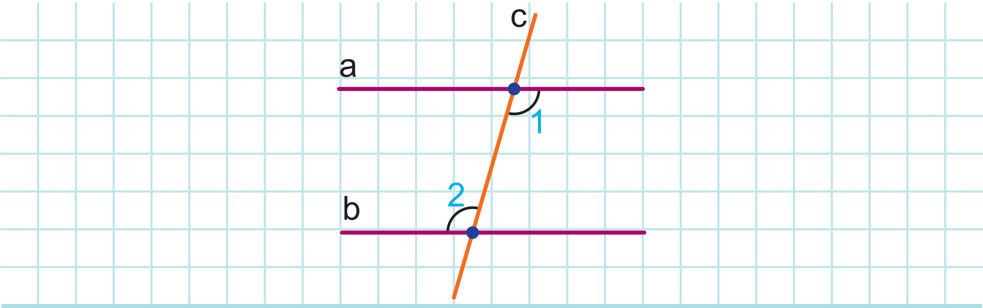
Նկար 111

256. Նկար 112-ում $\angle 1 = \angle 2$: Զուգահե՞ռ են a և b ուղիղները: Պատասխանը հիմնավորեք:



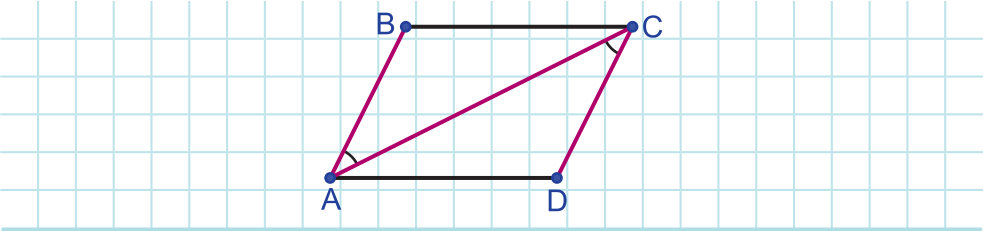
Նկար 112

257. Նկար 113-ում $\angle 1 = \angle 2$: Զուգահե՞ռ են a և b ուղիղները: Պատասխանը հիմնավորեք:



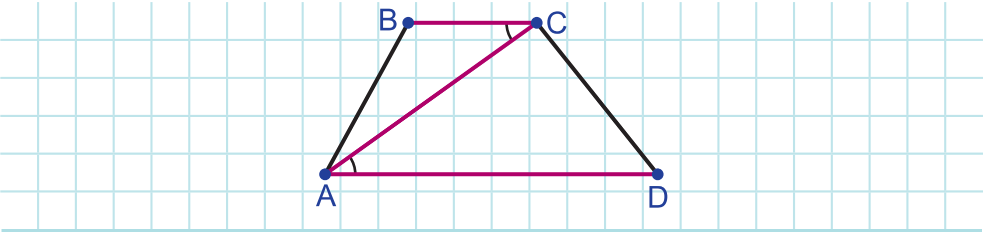
Նկար 113

258. Նկար 114-ում $\angle BAC = \angle ACD$: Ապացուցեք, որ AB-ն զուգահեռ է CD-ին:



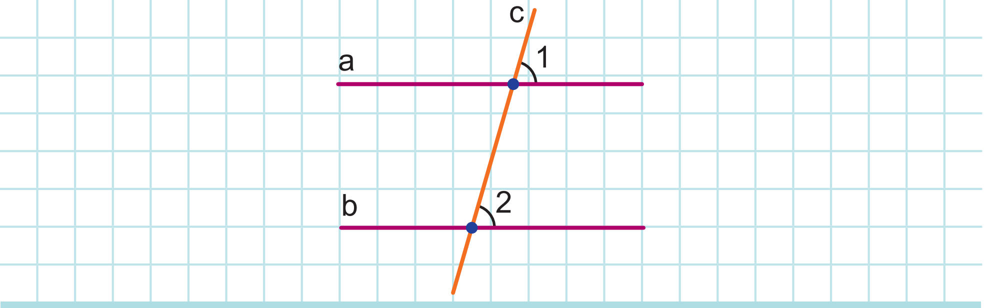
Նկար 114

259. Նկար 115-ում $\angle BCA = \angle CAD$: Ապացուցեք, որ BC-ն զուգահեռ է AD-ին:



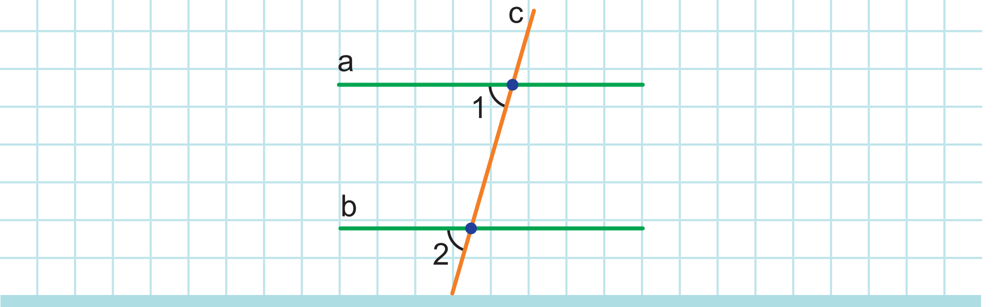
Նկար 115

260. Նկար 116-ում $\angle 1 = \angle 2$: Զուգահե՞ռ են a և b ուղիղները: Պատասխանը հիմնավորեք:



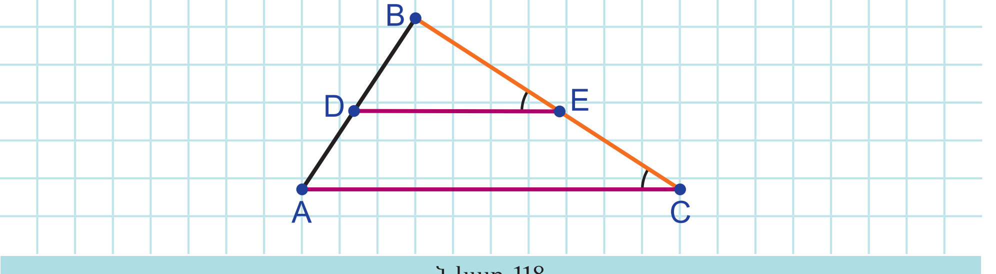
Նկար 116

261. Նկար 117–ում $\angle 1 = \angle 2$: Զուգահե՞ռ են a և b ուղիղները: Պատասխանը հիմնավորեք:



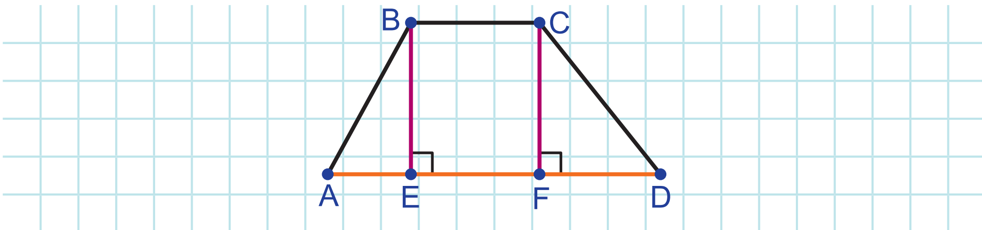
Նկար 117

262. Նկար 118–ում $\angle BED = \angle BCA$: Ապացուցեք, որ DE–ն զուգահեռ է AC–ին:



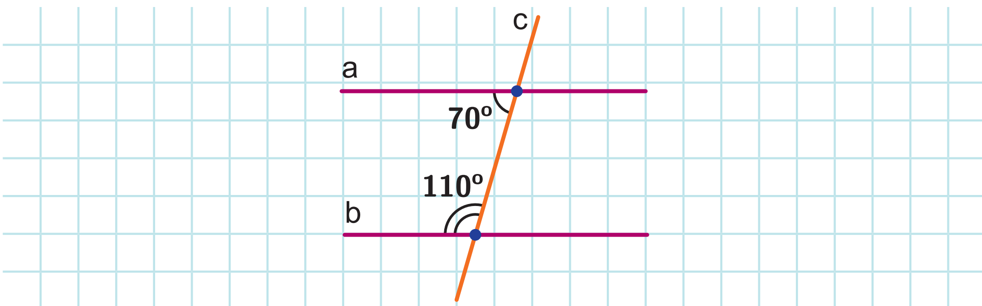
Նկար 118

263. Նկար 119–ում $BE \perp AD$, $CF \perp AD$: Ապացուցեք, որ BE–ն զուգահեռ է CF–ին:



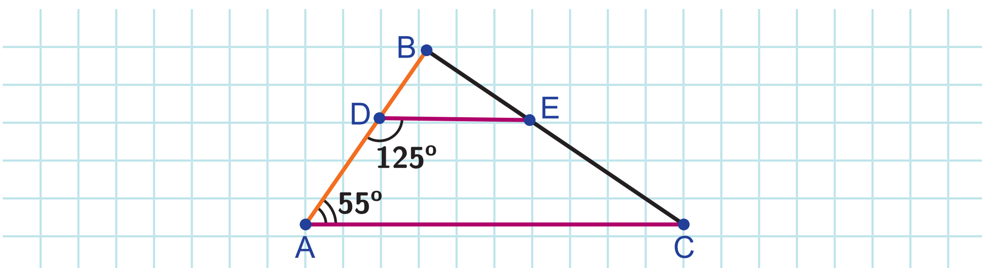
Նկար 119

264. Ինչպիսի՞ն են նկար 120–ի a և b ուղիղները: Պատասխանը հիմնավորեք:



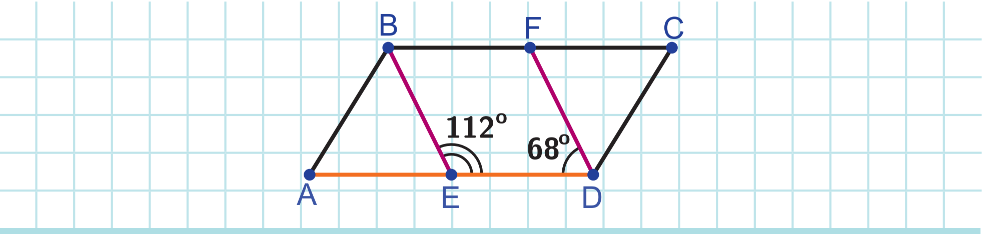
Նկար 120

265. Նկար 121–ում $\angle BAC = 55°$, $\angle ADE = 125°$: Ապացուցեք, որ $DE \parallel AC$:



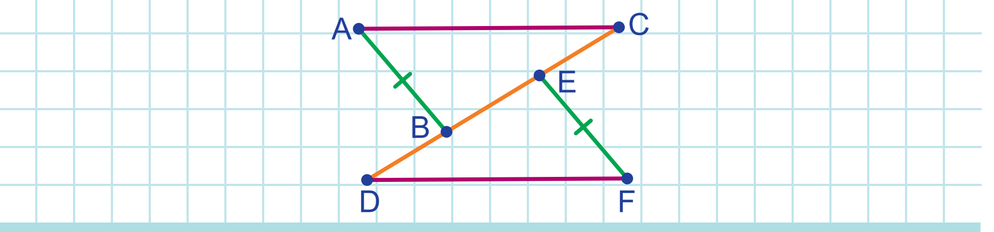
Նկար 121

266. Նկար 122–ում $\angle BED = 112°$, $\angle FDE = 68°$: Ապացուցեք, որ $BE \parallel DF$:



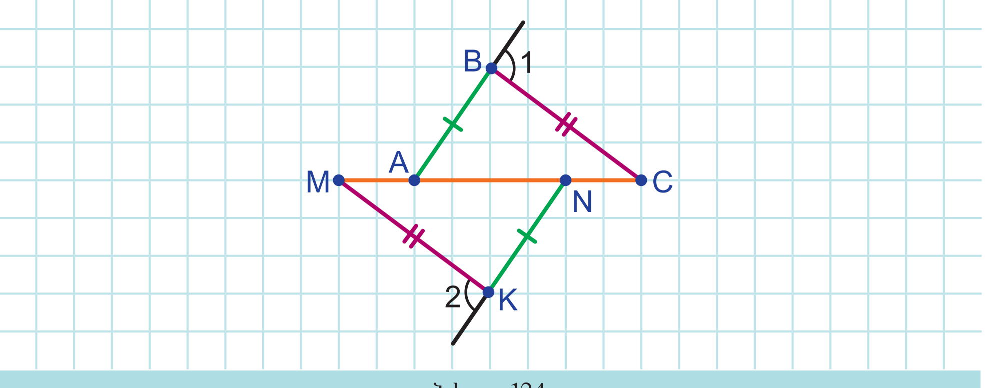
Նկար 122

267. Նկար 123–ում $\Delta ABC = \Delta DEF$, $AB = EF$: Ապացուցեք, որ $AC \parallel DF$:



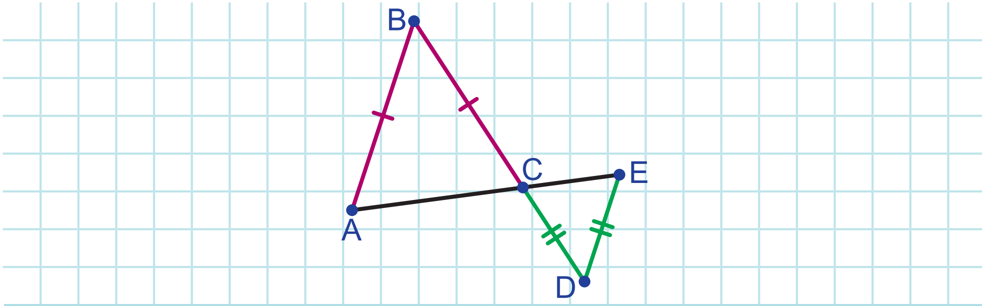
Նկար 123

268. Նկար 124–ում $AB = NK$, $BC = MK$, $\angle 1 = \angle 2$: Ապացուցեք, որ $BC \parallel MK$:



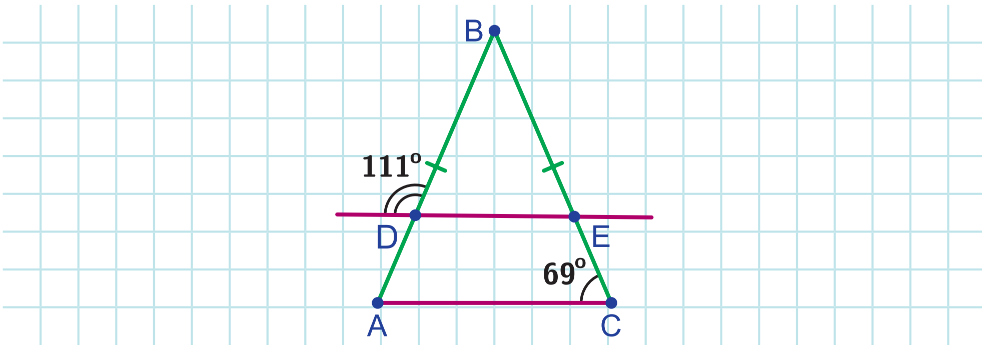
Նկար 124

269. Նկար 125–ում $AB = BC$, $CD = DE$: Ապացուցեք, որ $AB \parallel ED$:



Նկար 125

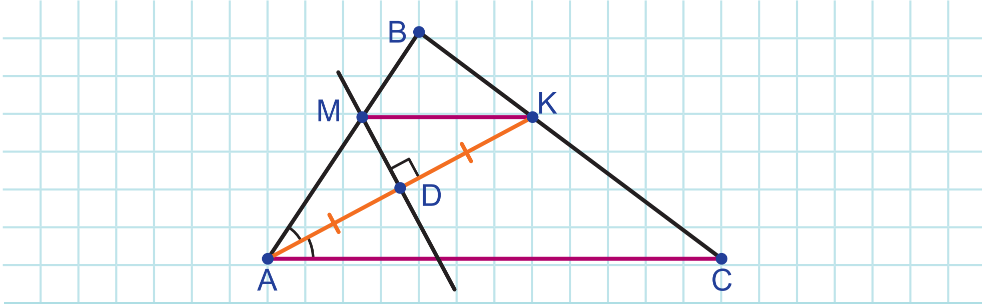
270. Օգտվելով նկար 126–ի տվյալներից՝ ապացուցեք, որ DE || AC:



Նկար 126

271. AB–ն և CD–ն նույն շրջանագծի տրամագծերն են: Ապացուցեք, որ AC || BD, AD || BC:

272. Նկար 127–ում ABC եռանկյան AK կիսորդի միջնուղղահայացը AB կողմը հատում է M կետում: Ապացուցեք, որ MK || AC:



Նկար 127

Անկանոն եզրեր ունեցող թուղթը ծալելով՝ ստացեք զուգահեռ հատվածներ:

§12. Զուգահեռ ուղիղների հատկությունները

❐ 31. Զուգահեռ ուղիղների աքսիոմը

Կետ 30-ի առաջին թեորեմից հետևում է, որ ուղղին չպատկանող կետով կարելի է տանել այդ ուղղին զուգահեռ ուղիղ:

Իսկ կարելի՞ է այդպիսի երկու ուղիղ տանել: Այս հարցի պատասխանը Էվկլիդեսը տվել է իր «Սկզբունքներ» աշխատությունում՝ որպես կանխադրույթ ընդունելով, որ այդպիսի ուղիղը միակն է: Էվկլիդեսի ձևակերպումը այլ էր, բայց համարժեք էր այդպիսի ուղղի միակության պնդմանը:

Այդ կանխադրույթը կասկած չէր առաջացնում, բայց երկար ժամանակ (մոտավորապես 2000 տարի) կարծում էին, որ դա կարելի է ապացուցել՝ հենվելով մնացած կանխադրույթների ու աքսիոմների վրա: Այդ ընթացքում շատ մաթեմատիկոսներ են փորձել ապացուցել այդ կանխադրույթը, բայց ոչ մեկին դա չի հաջողվել:

Գուցե մինչև այսօր էլ այդպիսի փորձերը շարունակվեին, եթե պարզված չլիներ, որ դա անհնար է ապացուցել:

1826 թվականին ռուս մաթեմատիկոս Ն. Ի. Լոբաչևսկին, իսկ 1832 թվականին հունգարացի մաթեմատիկոս Յ. Բոյային, ընդունելով, որ ուղղին չպատկանող կետով տրված ուղղին կարելի է տանել մեկից ավելի զուգահեռ, կառուցեցին ոչ էվկլիդեսյան երկրաչափություն:

Այդպիսի ենթադրություն անելով՝ նրանք սպասում էին, որ կգան հակասության ու ապացուցած կլինեն Էվկլիդեսի կանխադրույթը: Բայց պարզվեց, որ փոխելով այդ կանխադրույթը՝ կարելի է կառուցել այլ երկրաչափություն:

Լոբաչևսկու և Բոյայիի ժամանակակիցները, մեղմ ասած, խանդավառությամբ չընդունեցին նոր երկրաչափությունը: Ավելին, ինքը՝ Լոբաչևսկին իր կառուցած երկրաչափությունը անվանել էր երևակայական երկրաչափություն: Ավելի ուշ, երբ Լոբաչևսկին մահացել էր, այդ երկրաչափությունը կոչեցին նրա անունով:

Այսպիսով, էվկլիդեսյան երկրաչափությունում ընդունված է.

Աքսիոմ: (Զուգահեռ ուղիղների աքսիոմը) Ուղղին չպատկանող կետով անցնում է տրված ուղղին զուգահեռ միայն մեկ ուղիղ:

Ներկայացնենք այս աքսիոմի երկու հետևանք:

Հետևանք 1: Եթե ուղիղը հատում է երկու զուգահեռ ուղիղներից մեկը, ապա հատում է նաև մյուսը:

Ապացուցում: Ենթադրենք՝ a և b ուղիղները զուգահեռ են, և c ուղիղը հատում է a ուղիղը A կետում: Ապացուցենք, որ c ուղիղը հատում է նաև b ուղիղը:

Ենթադրենք հակառակը՝ c ուղիղը չի հատում b ուղիղը: Այդ դեպքում կունենանք, որ $c \parallel b$: Ունենք նաև որ $a \parallel b$: Քանի որ a և c ուղիղները անցնում են A կետով, ապա ստացվում է, որ A կետով անցնում է երկու ուղիղ՝ c-ն և a-ն, որոնք զուգահեռ են b-ին: Բայց դա հակասում է զուգահեռ ուղիղների աքսիոմին: Ուրեմն, ենթադրությունը, որ c ուղիղը չի հատում b ուղիղը, սխալ է: Հետևանք 1-ն ապացուցված է:

Հետևանք 2: Եթե երկու ուղիղ զուգահեռ են երրորդ ուղղին, ապա դրանք զուգահեռ են:

Ապացուցում: Ենթադրենք՝ $a \parallel c$, $b \parallel c$: Ապացուցենք, որ $a \parallel b$:

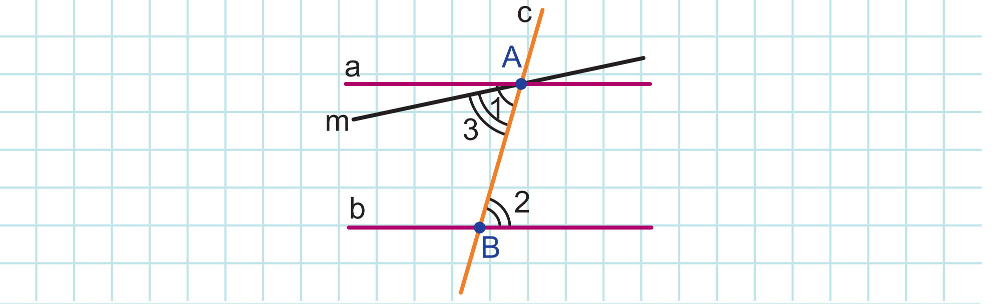
Ենթադրենք հակառակը՝ a-ն զուգահեռ չէ b-ին: Այդ դեպքում a և b ուղիղները կհատվեն ինչ-որ K կետում: Եվ կստացվի, որ K կետով անցնում է երկու ուղիղ՝ a-ն և b-ն, որոնք զուգահեռ են c-ին: Բայց դա հակասում է զուգահեռ ուղիղների աքսիոմին: Ուրեմն, ենթադրությունը, որ a-ն զուգահեռ չէ b-ին, սխալ է: Հետևաբար, $a \parallel b$: Հետևանք 2-ն ապացուցված է:

❐ 32. Թեորեմներ երկու զուգահեռ ուղիղներով և հատողով կազմված անկյունների մասին

Կետ 30-ում ձևակերպվել և ապացուցվել է ուղիղների զուգահեռության երեք հայտանիշ: Այս կետում կտեսնենք, որ ճիշտ են այդ թեորեմների հակադարձ պնդումները: Ու դրանք լրացնում են զուգահեռ ուղիղների նախորդ կետում ներկայացված հատկությունները (տես հետևանք 1, հետևանք 2):

Թեորեմ: Եթե երկու զուգահեռ ուղիղ հատված է հատողով, ապա խաչադիր անկյունները հավասար են:

Ապացուցում: Ենթադրենք՝ c ուղիղը հատել է a և b զուգահեռ ուղիղները: Ապացուցենք, որ 1 և 2 խաչադիր անկյունները հավասար են:

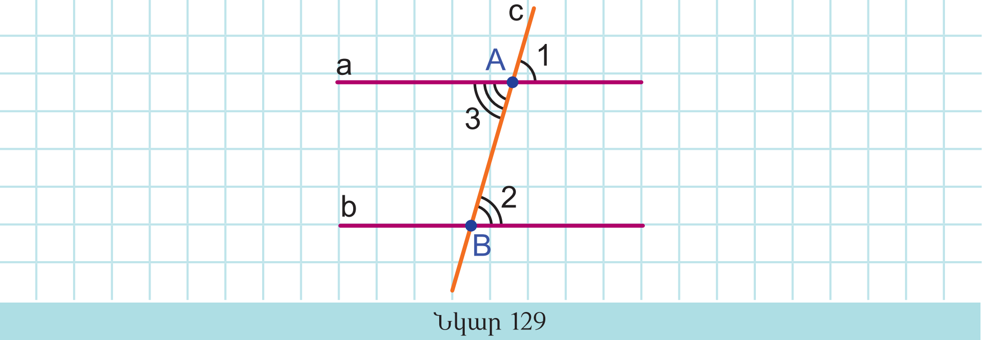


Նկար 128

Ենթադրենք հակառակը՝ $\angle 1 \neq \angle 2$: AB ճառագայթի վրա տեղադրենք անկյուն 2-ին հավասար անկյուն 3-ը այնպես, որ 3 և 2 անկյունները լինեն խաչադիր (նկ. 128): Այդ դեպքում, ըստ ուղիղների զուգահեռության հայտանիշի, կհետևի, որ $m \parallel b$: Ունենք նաև, որ $a \parallel b$: Ստացվում է, որ A կետով անցնում է երկու ուղիղ՝ a-ն և m-ը, որոնք զուգահեռ են b-ին: Բայց դա հակասում է զուգահեռ ուղիղների աքսիոմին: Ուրեմն, ենթադրությունը, որ $\angle 1 \neq \angle 2$, սխալ է: Հետևաբար, $\angle 1 = \angle 2$: Թեորեմն ապացուցված է:

Թեորեմ: Եթե երկու զուգահեռ ուղիղ հատված է հատողով, ապա համանդիր անկյունները հավասար են:

Ապացուցում: Ենթադրենք՝ c ուղիղը հատել է a և b զուգահեռ ուղիղները: Ապացուցենք, որ 1 և 2 համանդիր անկյունները հավասար են (նկ. 129):

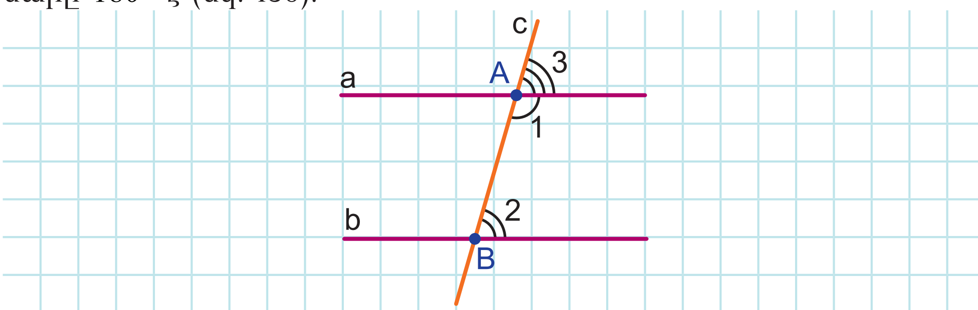


Նկար 129

Քանի որ $a \parallel b$, ապա, ըստ նախորդ թեորեմի, 3 և 2 խաչադիր անկյունները հավասար են՝ $\angle 3 = \angle 2$: Մյուս կողմից, որպես հակադիր անկյուններ, $\angle 1 = \angle 3$: Ուրեմն, $\angle 1 = \angle 2$: Թեորեմն ապացուցված է:

Թեորեմ: Եթե երկու զուգահեռ ուղիղ հատված է հատողով, ապա միակողմանի անկյունների գումարը 180° է:

Ապացուցում: Ենթադրենք՝ c ուղիղը հատել է a և b զուգահեռ ուղիղները: Ապացուցենք, որ 1 և 2 միակողմանի անկյունների գումարը 180° է (նկ. 130):



Նկար 130

Քանի որ $a \parallel b$, ապա, ըստ նախորդ թեորեմի, 3 և 2 համադիր անկյունները հավասար են՝ $\angle 3 = \angle 2$: Մյուս կողմից, որպես կից անկյուններ, $\angle 1 + \angle 3 = 180^\circ$: Ստացվածում անկյուն 3-ը փոխարինելով իրեն հավասար անկյուն 2-ով՝ կունենանք, որ $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$: Թեորեմն ապացուցված է:

Դինամիկ մաթեմատիկա

1. Դինամիկ մաթեմատիկայի ծրագրով, օգտվելով «Կտավի» ցանկից, կառուցեք AB և CD զուգահեռ ուղիղներ: Տեղաշարժեք A կամ C կետը: Պահպանվո՞ւմ է ուղիղների զուգահեռությունը:
2. Դինամիկ մաթեմատիկայի ծրագրերով կառուցեք AB ուղիղը և դրան չպատկանող C կետը: «Զուգահեռ ուղիղ» գործիքով կառուցեք C կետով անցնող և AB ուղղին զուգահեռ ուղիղ: Տեղաշարժեք A կամ C կետը: Պահպանվո՞ւմ է ուղիղների զուգահեռությունը:

3. Դինամիկ մաթեմատիկայի ծրագրով կառուցեք AB և CD զուգահեռ ուղիղներ և դրանք հատող որևէ EF ուղիղ:
Չափեք միակողմանի անկյունների մի զույգի մեծությունները:
Ստեղծեք գրություն, որը ցույց կտա չափված միակողմանի անկյունների գումարը: Շարժեք B կամ D կետը և հետևեք անկյունների գումարը ցույց տվող գրությանը: Արեք եզրակացություն:

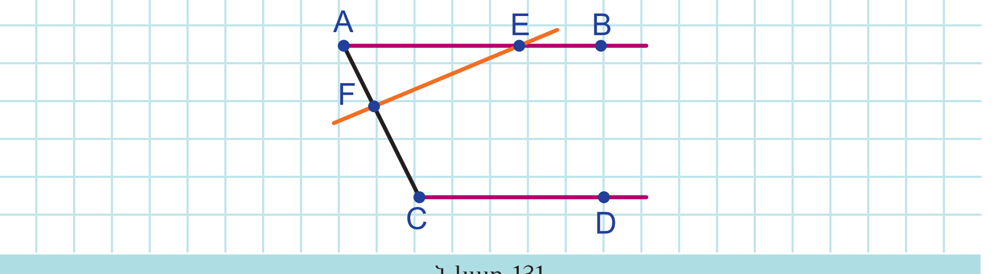
Ինտերակտիվ մոդել
Զուգահեռ ուղիղների հատկությունները

Հարցեր և խնդիրներ

273. Քանի՞ ուղիղ կարելի է տանել a ուղղին չպատկանող K կետով, որոնք զուգահեռ են a ուղղին: Պատասխանը հիմնավորեք:

274. ABC եռանկյան կողմերից մեկը զուգահեռ է a ուղղին: Կարո՞ղ է մյուս կողմերից որևէ մեկը նույնպես զուգահեռ լինել a ուղղին: Պատասխանը հիմնավորեք:

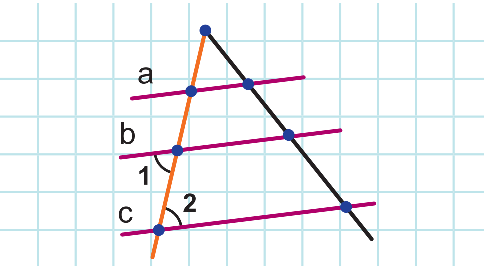
275. Նկար 131-ում $AB \parallel CD$: EF ուղիղը հատո՞ւմ է CD ուղիղը: Պատասխանը հիմնավորեք:



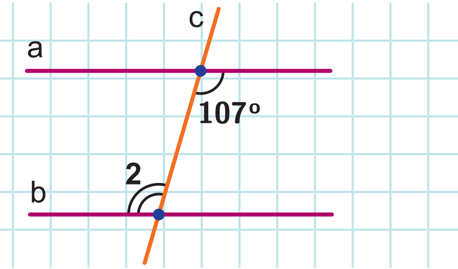
Նկար 131

276. Նկար 132-ում $a \parallel c$, $\angle 1 = \angle 2$: Ապացուցեք, որ $a \parallel b$:

277. Նկար 133-ում $a \parallel b$: Գտեք $\angle 2$-ը:

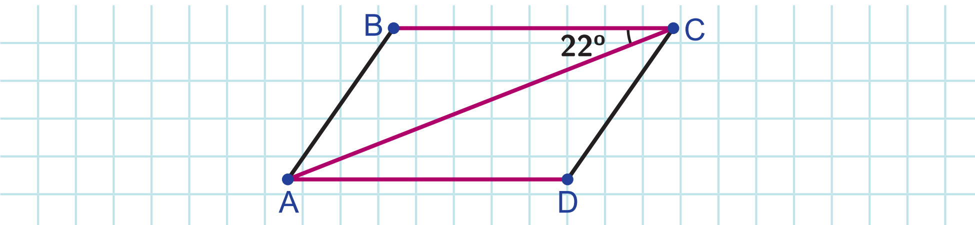


Նկար 132



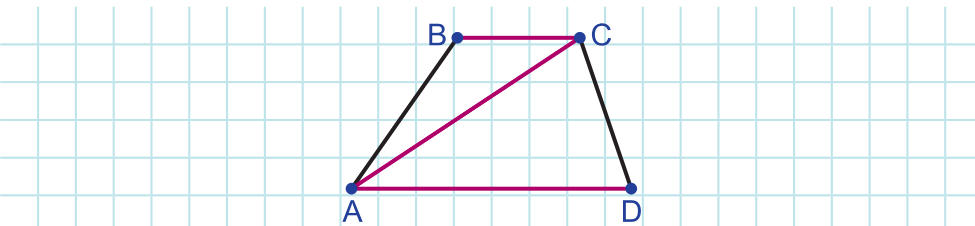
Նկար 133

278. Նկար 134–ում $BC \parallel AD$, $\angle BCA = 22°$: Գտեք $\angle CAD$–ն:



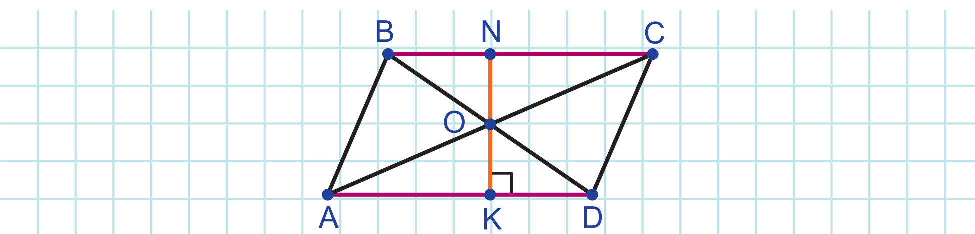
Նկար 134

279. Նկար 135–ում $BC \parallel AD$, $\angle BCA + \angle CAD = 68°$: Գտեք $\angle BCA$–ն:



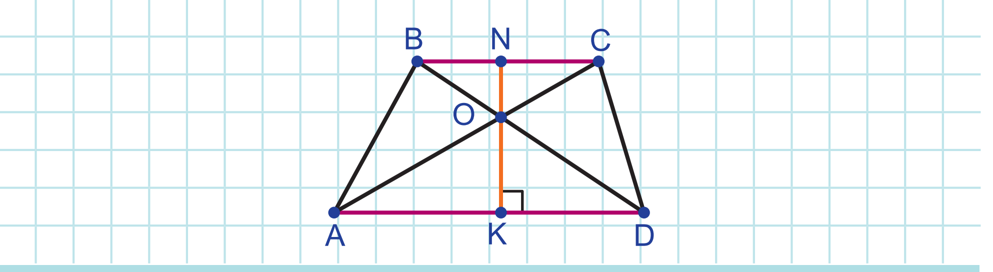
Նկար 135

280. Նկար 136–ում $BC \parallel AD$, OK–ն ուղղահայաց է AD–ին և հատում է BC–ն N կետում: Գտեք ONB անկյունը:



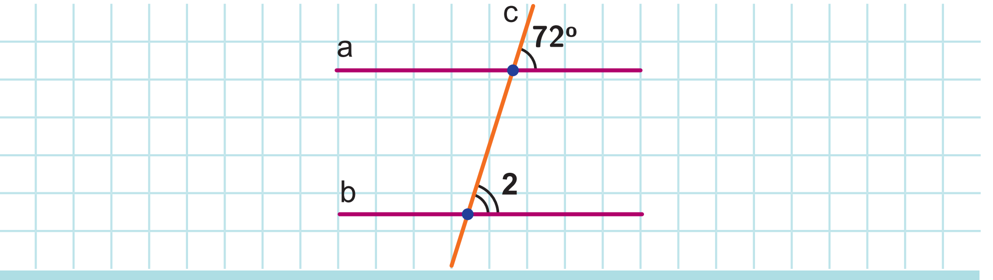
Նկար 136

281. Նկար 137–ում $BC \parallel AD$, OK–ն ուղղահայաց է AD–ին և հատում է BC–ն N կետում: Գտեք ONC անկյունը:



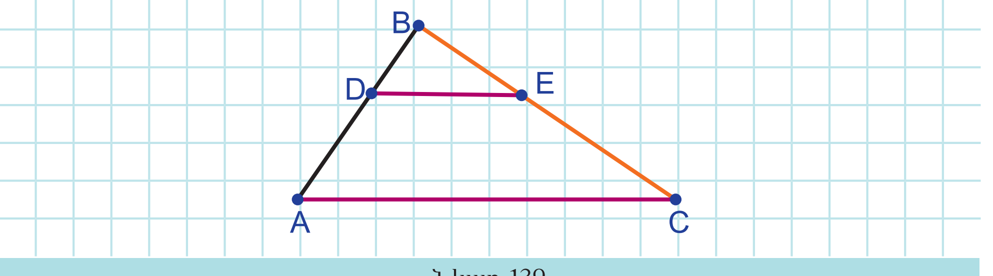
Նկար 137

282. Նկար 138–ում $a \parallel b$: Գտեք $\angle 2$ –ը:



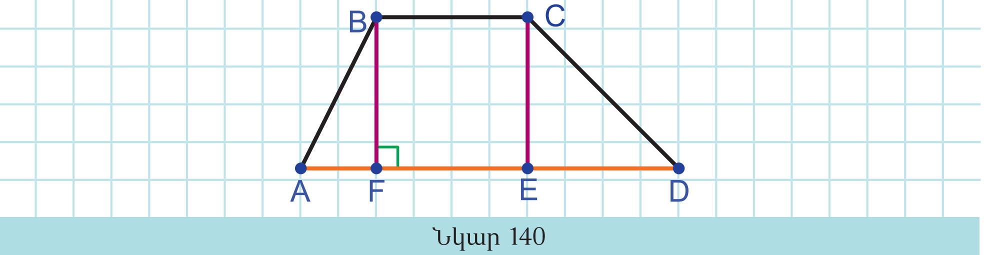
Նկար 138

283. Նկար 139–ում $DE \parallel AC$: Ապացուցեք, որ $\angle BED = \angle BCA$:



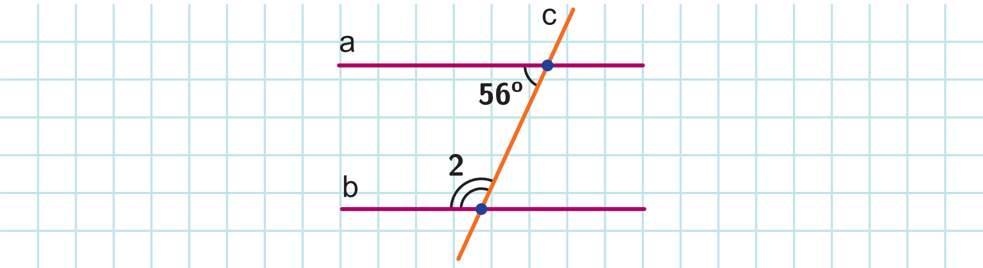
Նկար 139

284. Նկար 140–ում $BF \parallel CE$, $BF \perp AD$: Ապացուցեք, որ $CE \perp AD$:



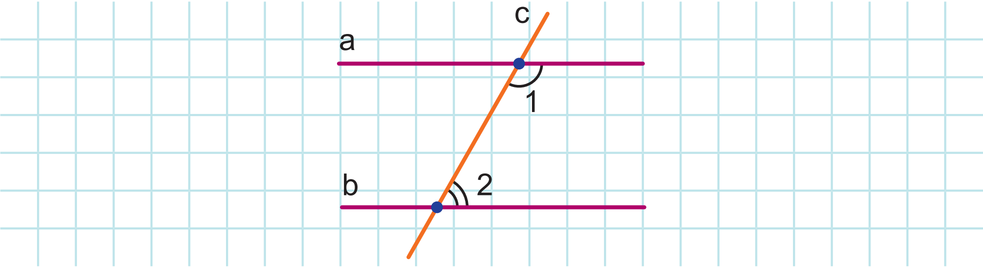
Նկար 140

285. Նկար 141–ում $a \parallel b$: Գտեք $\angle 2$–ը:



Նկար 141

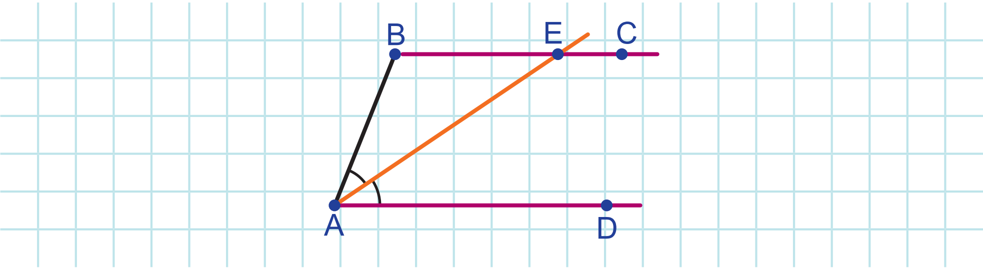
286. Նկար 142–ում $a \parallel b$, $\angle 2$–ը երկու անգամ փոքր է $\angle 1$–ից: Գտեք $\angle 2$–ը:



Նկար 142

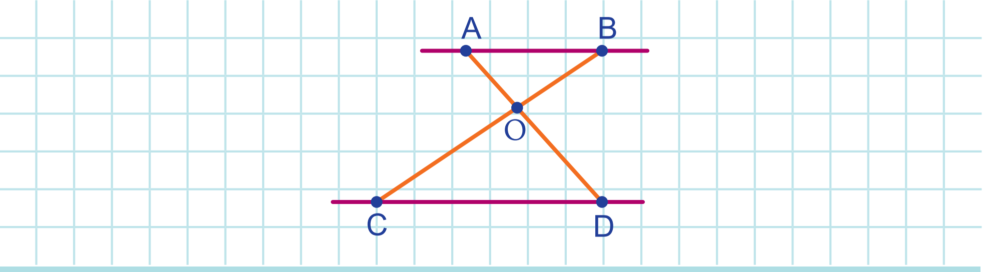
287. Երկու զուգահեռ ուղիղ հատողով հատելիս միակողմանի անկյունների տարբերությունը 20° է: Գտեք այդ անկյունները:

288. Նկար 143–ում $BC \parallel AD$, AE–ն A անկյան կիսորդն է: Ապացուցեք, որ $AB = BE$:



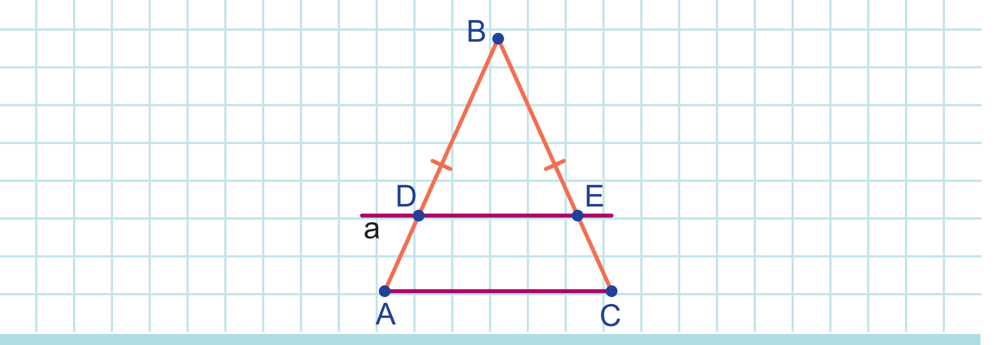
Նկար 143

289. Նկար 144–ում $AB \parallel CD$: Ապացուցեք, որ AOB և COD եռանկյունների անկյունները համապատասխանաբար հավասար են:



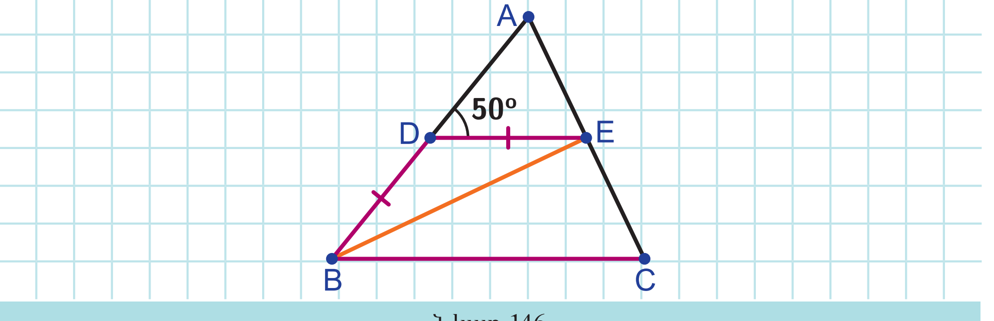
Նկար 144

290. a ուղիղը զուգահեռ է ABC հավասարասրուն եռանկյան AC հիմքին և հատում է AB և BC սրունքները D և E կետերում (նկ. 145): Ապացուցեք, որ BDE եռանկյունը հավասարասրուն է:



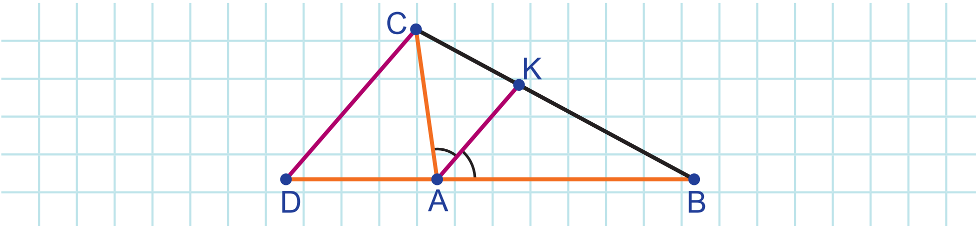
Նկար 145

291. Նկար 146–ում $DE \parallel BC$, $BD = DE$: Գտեք $\angle EBC$–ն, եթե $\angle ADE = 50^{\circ}$:

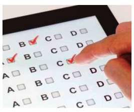


Նկար 146

292. ABC եռանկյան C գագաթով տարված է AK կիսորդին զուգահեռ ուղիղ, որը AB կողմի շարունակությունը հատում է D կետում (նկ. 147): Ապացուցեք, որ $AC = AD$:



Նկար 147



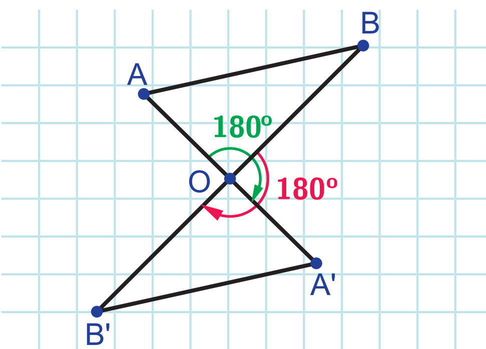
Համակարգչային թեմատիկ թեստ

Ներբեռնման հղումը՝ https://mathnet.am/etest/7-3.zip

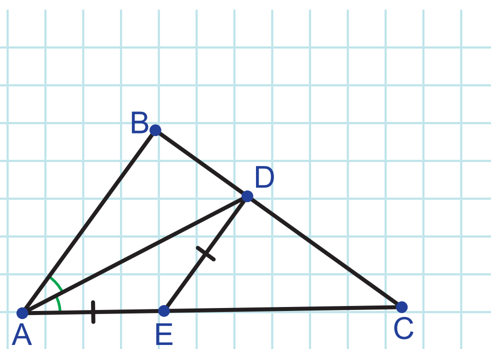
Լրացուցիչ խնդիրներ

293. O-ն AB և CD հատվածների ընդհանուր միջնակետն է: Ապացուցեք, որ $AD \parallel CB$:

294. AB հատվածի ծայրակետերը 180°-ով պտտել են AB հատվածին չպատկանող O կետի շուրջը և ստացել $A'B'$ հատվածը: Ապացուցեք, որ $AB \parallel A'B'$ (նկ.148):



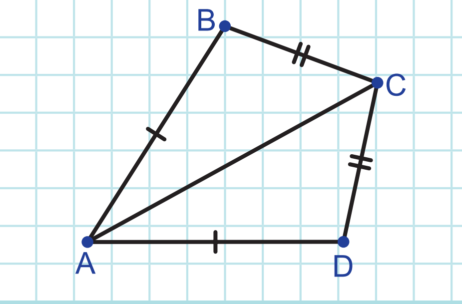
Նկար 148



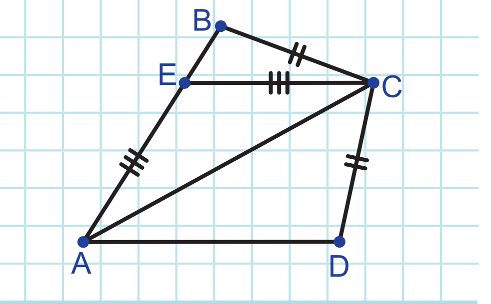
Նկար 149

295. Օգտվելով նկար 149-ի տվյալներից՝ ապացուցեք, որ $DE \parallel AB$:

296. Օգտվելով նկար 150-ի տվյալներից՝ ապացուցեք, որ $\angle BAC = \angle CAD$:



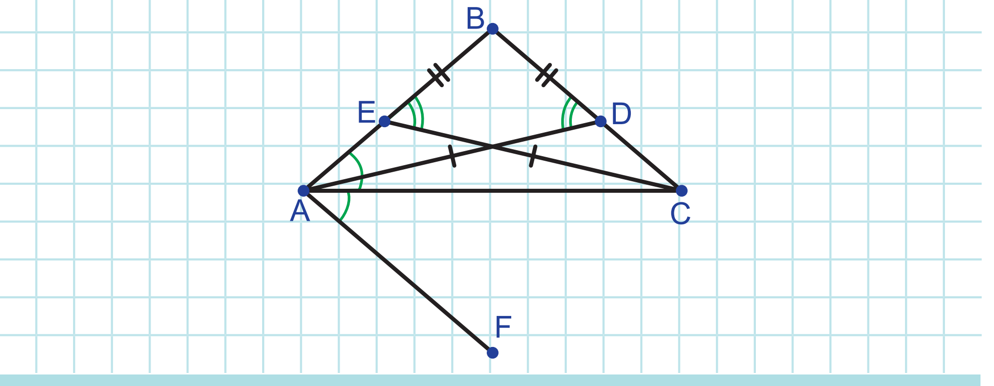
Նկար 150



Նկար 151

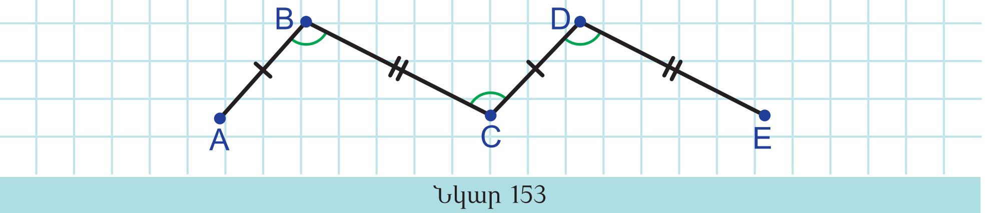
297. Նկար 151-ում $AB = AD$, $BC = CD$, $AE = EC$: Ապացուցեք, որ $AD \parallel EC$:

298. Նկար 152-ում AC-ն BAF անկյան կիսորդն է, $AD = CE$, $BE = BD$, $\angle BEC = \angle BDA$: Ապացուցեք, որ $AF \parallel BC$:



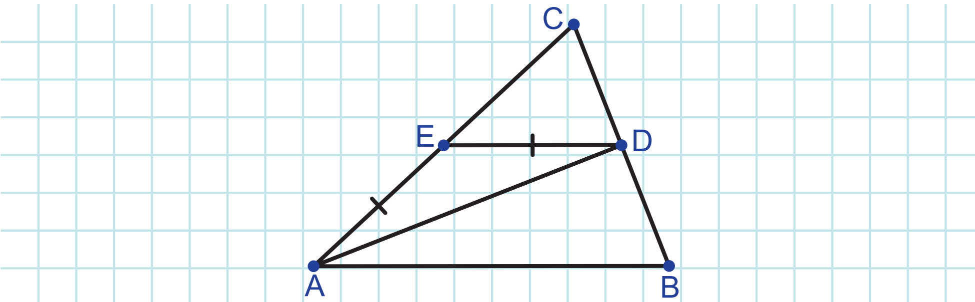
Նկար 152

299. Նկար 153-ում $AB = CD$, $BC = DE$, $\angle ABC = \angle BCD = \angle CDE$: Ապացուցեք, որ A, C, E կետերը մի ուղղի վրա են:



Նկար 153

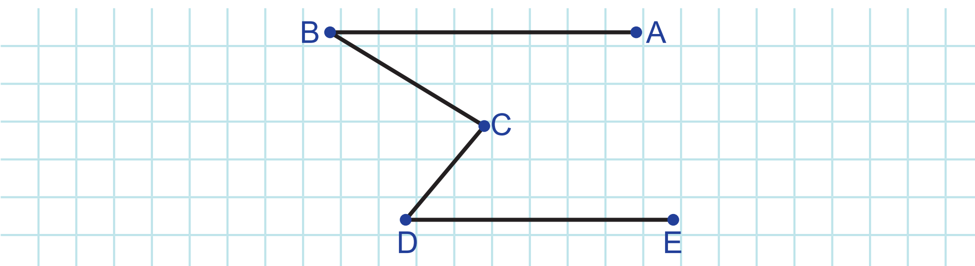
300. Նկար 154–ում $AB = AC$, $AE = DE$, $DE \parallel AB$: Ապացուցեք, որ $AD \perp BC$:



Նկար 154

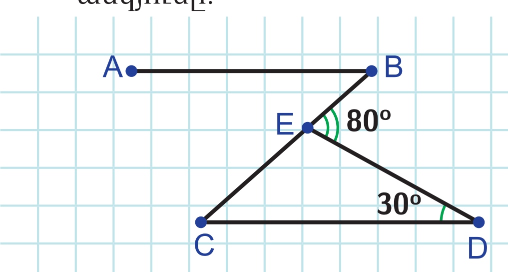
301. a ուղղի A կետով տարված են AB, AC և AD ճառագայթներն այնպես, որ դրանք a ուղղի միևնույն կողմում են: AB ճառագայթի K կետով տարված է a ուղղին զուգահեռ b ուղիղը, որը AC ճառագայթը հատում է M, իսկ AD ճառագայթը՝ N կետում: Ապացուցեք, որ եթե $KM = MN = AM$, ապա $AB \perp AD$:

302. Նկար 155–ում $AB \parallel DE$: Ապացուցեք, որ $\angle BCD = \angle ABC + \angle CDE$:

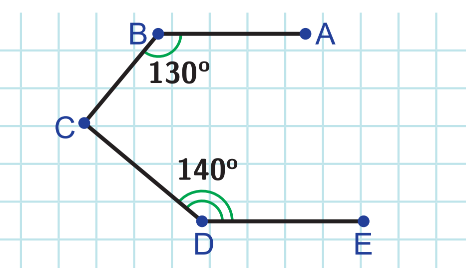


Նկար 155

303. Նկար 156–ում $AB \parallel CD$, $\angle BED = 80^\circ$, $\angle EDC = 30^\circ$: Գտեք ABC անկյունը:



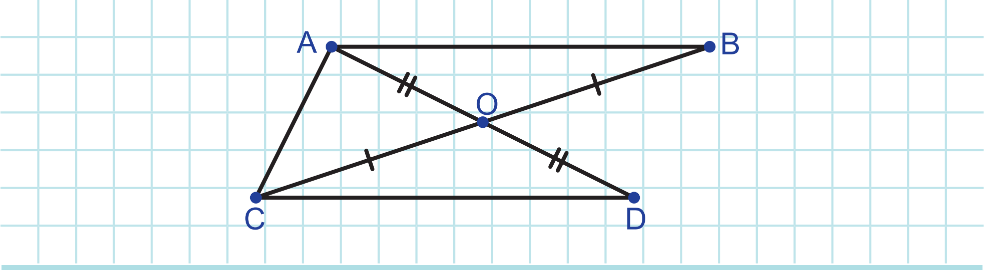
Նկար 156



Նկար 157

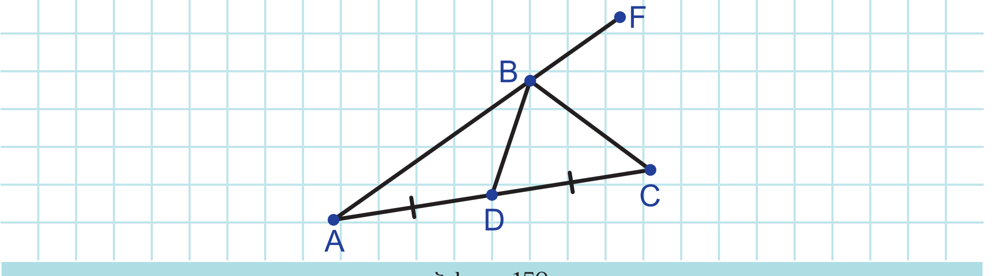
304. Նկար 157–ում $AB \parallel DE$, $\angle CBA = 130^\circ$, $\angle CDE = 140^\circ$: Ապացուցեք, որ $BC \perp CD$:

305. Նկար 158–ում $BO = OC$, $AO = OD$, $\angle CAB = 116^\circ$: Գտեք $\angle ACD$–ն:



Նկար 158

306. Նկար 159–ում BD–ն ABC եռանկյան միջնագիծն է, ընդ որում՝ $AB = 2 \cdot BD$: Ապացուցեք, որ BC–ն FBD անկյան կիսորդն է:



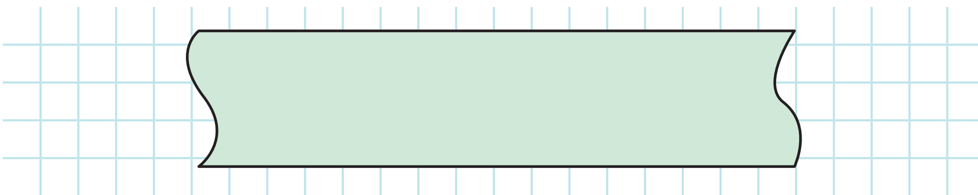
Նկար 159

307. Ապացուցեք, որ շրջանագծի զուգահեռ լարերի միջուղղահայացները համընկնում են:

308. Կետ 15–ում ապացուցել ենք, որ եռանկյան արտաքին անկյունը մեծ է եռանկյան այն անկյուններից, որոնք կից չեն այդ արտաքին անկյանը: Ապացուցեք, որ եռանկյան արտաքին անկյունը հավասար է եռանկյան այն անկյունների գումարին, որոնք կից չեն այդ արտաքին անկյանը:

309. Օգտվելով նախորդ խնդրից՝ ապացուցեք, որ եռանկյան անկյունների գումարը 180° է:

310. Զուգահեռ կողմերով և առանց բաժանումների քանոնով (նկ. 160) կառուցեք տրված անկյանը հավասար որևէ անկյուն:



Նկար 160

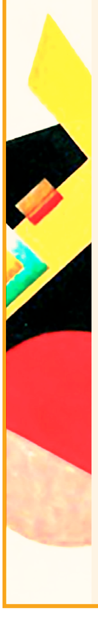
311. Զուգահեռ կողմերով և առանց բաժանումների քանոնով (նկ. 160) կառուցեք երկու ոչ կից անկյուններ, որոնց գումարը 180° է:

Ուսումնասիրելով այս գլուխը՝

- Իմացաք, թե որ ուղիղներն են կոչվում զուգահեռ ուղիղներ:
- Իմացաք զուգահեռ ուղիղների հատկություններն ու հայտանիշները:
- Սովորեցիք այդ հատկություններն ու հայտանիշները կիրառել խնդիրներ լուծելիս:
- Իմացաք զուգահեռ ուղիղների աքսիոմն ու դրա հետևանքները, կիրառեցիք դրանք խնդիրներ լուծելիս:

ԳԼՈՒԽ IV

ԱՌՆՉՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ ԵՌԱՆԿՅԱՆ ԿՈՂՄԵՐԻ ԵՎ ԱՆԿՅՈՒՆՆԵՐԻ ՄԻՋԵՎ



Ուսումնասիրելով այս գլուխը՝

- Կիմանաք եռանկյան անկյունների գումարի մասին թեորեմը և կսովորեք կիրառել այն խնդիրներ լուծելիս:
- Կիմանաք եռանկյան կողմերի և դրանց հանդիպակաց անկյունների միջև առնչությունների մասին թեորեմը և կսովորեք կիրառել այն խնդիրներ լուծելիս:
- Կիմանաք ուղղանկյուն եռանկյան որոշ հատկություններ, ուղղանկյուն եռանկյունների հավասարության հայտանիշները և կսովորեք կիրառել դրանք խնդիրներ լուծելիս:
- Կիմանաք եռանկյան անհավասարությունը, անկյան կիսորդի հատկությունը, կկիրառեք դրանք խնդիրներ լուծելիս:
- Կիմանաք կետի և ուղղի, զուգահեռ ուղիղների հեռավորության, բեկյալի սահմանումները:
- Կիմանաք, թե ինչպես կարկինով ու քանոնով կառուցել եռանկյուն՝ ըստ դրա երեք տարրերի:

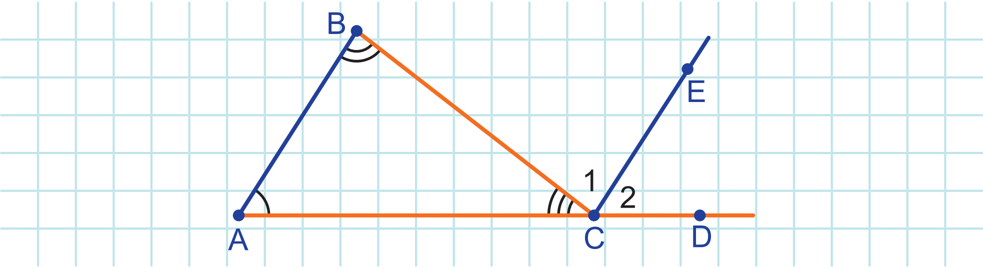
§13. Եռանկյան անկյունների գումարը

❒ 33. Եռանկյան անկյունների գումարը

Եռանկյան արտաքին անկյան մասին գլուխ II-ի թեորեմը որակական բնույթ ուներ: Այս կետում կպարզվի այդ թեորեմում դիտարկվող անկյունների քանակական կապը:

Թեորեմ: Եռանկյան արտաքին անկյունը հավասար է եռանկյան՝ իրեն ոչ կից անկյունների գումարին:

Ապացուցում: Դիտարկենք ABC կամայական եռանկյան, օրինակ, C գագաթին հարակից BCD արտաքին անկյունը և ցույց տանք, որ այն հավասար է A և B անկյունների գումարին (նկ. 161):



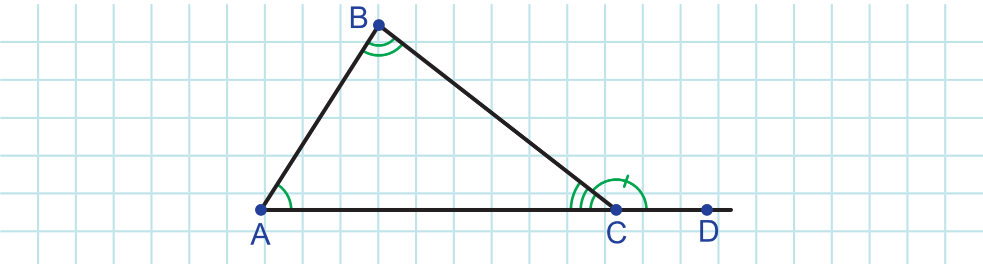
Նկար 161

Տանենք CE-ն զուգահեռ AB-ին: Որպես AB և CE զուգահեռ ուղիղները BC-ով հատելիս առաջացած խաչադիր անկյուններ՝ $\angle 1 = \angle B$: Իսկ որպես AB և CE զուգահեռ ուղիղները AD-ով հատելիս առաջացած համադիր անկյուններ՝ $\angle 2 = \angle A$: Հետևաբար, $\angle BCD = \angle 1 + \angle 2 = \angle B + \angle A$: Թեորեմն ապացուցված է:

Օգտվելով այս թեորեմից՝ ապացուցենք ևս մի թեորեմ:

Թեորեմ: Եռանկյան անկյունների գումարը 180° է:

Ապացուցում: Դիտարկենք ABC կամայական եռանկյուն և ցույց տանք, որ դրա անկյունների գումարը 180° է (նկ. 162):



Նկար 162

Որպես կից անկյուններ՝ $\angle BCD + \angle BCA = 180^\circ$: Բացի դրանից, ըստ եռանկյան արտաքին անկյան մասին վերևում ապացուցված թեորեմի, $\angle BCD = \angle A + \angle B$: Ուրեմն, $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$: Թեորեմն ապացուցված է:

Վերևում ապացուցված թեորեմները ձեզ արդեն հանդիպել են՝ 308 և 309 խնդիրները: Բայց դրանք կարևոր և շատ հաճախ կիրառվող օրինաչափություններ են և պետք էր ներկայացնել նաև տեսության մեջ:

Թեորեմ: Ուղղանկյուն եռանկյան սուր անկյունների գումարը 90° է:

Ապացուցում: Դիտարկենք C ուղիղ անկյունով կամայական ABC եռանկյուն: Քանի որ $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$, իսկ $\angle C = 90^\circ$, ապա $\angle A + \angle B = 180^\circ - \angle C = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$: Թեորեմն ապացուցված է:

Ինտերակտիվ մոդել

Եռանկյան արտաքին անկյուն

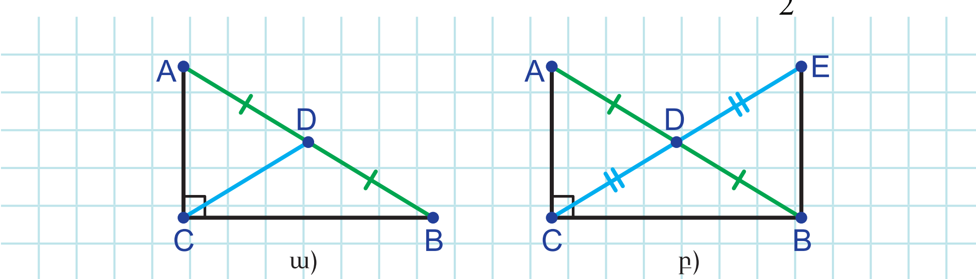
Ինտերակտիվ մոդել

Եռանկյան անկյունների գումարը

❒ 34. Ուղղանկյուն եռանկյան որոշ հատկություններ

Թեորեմ: Ուղղանկյուն եռանկյան ներքնաձիգին տարված միջնագիծը հավասար է ներքնաձիգի կեսին:

Ապացուցում: Ենթադրենք՝ ABC ուղղանկյուն եռանկյունում $\angle C = 90^\circ$, $AD = DB$ (նկ.163 ա): Ցույց տանք, որ $CD = \dfrac{AB}{2}$:



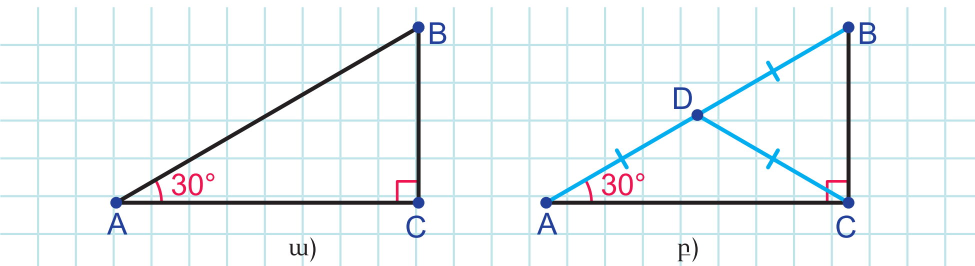
Նկար 163

CD միջնագծի շարունակության վրա տեղադրենք CD–ին հավասար DE հատվածը և E–ն միացնենք B–ին (նկ. 163 բ):

Քանի որ $AD = DB$, $CD = DE$, $\angle ADC = \angle EDB$ (հակադիր անկյուններ են), ապա, ըստ եռանկյունների հավասարության I հայտանիշի, $\Delta ADC = \Delta DEB$: Հետևաբար, $AC = EB$, $\angle EBA = \angle A$: Ուրեմն, $\angle EBC = \angle EBA + \angle ABC = \angle A + \angle ABC = 90^0$ (ուղղանկյուն եռանկյան սուր անկյունների գումարը 90° է): Պարզվեց, որ EBC եռանկյունն ուղղանկյուն եռանկյուն է, ընդ որում՝ դրա էջերը համապատասխանաբար հավասար են ABC եռանկյան էջերին: Հետևաբար, ըստ եռանկյունների հավասարության I հայտանիշի, $\Delta EBC = \Delta ACB$: Վերջինից էլ հետևում է, որ $CE = AB$: Ուրեմն, $CD = \dfrac{CE}{2} = \dfrac{AB}{2}$: Թեորեմն ապացուցված է:

Թեորեմ: Ուղղանկյուն եռանկյան 30°–ի անկյան դիմացի էջը հավասար է ներքնաձիգի կեսին:

Ապացուցում: Ենթադրենք՝ ABC ուղղանկյուն եռանկյունում $\angle C = 90^\circ$, $\angle A = 30^\circ$ (նկ.164 ա): Ցույց տանք, որ $BC = \dfrac{AB}{2}$:



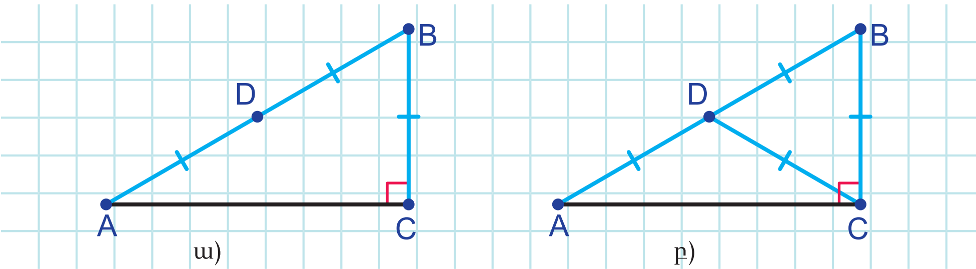
Նկար 164

Տանենք CD միջնագիծը: Ըստ նախորդ թեորեմի՝ $CD = AD = DB$ (նկ. 164 բ): Հետևաբար, $\angle DCA = \angle A = 30^\circ$: Որպես ADC եռանկյան արտաքին անկյուն՝ $\angle BDC = 30^\circ + 30^\circ = 60^\circ$: Բացի դրանից, $\angle BCD = 90^\circ - \angle DCA = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$: Ուրեմն, $\angle BDC = \angle BCD$: Հետևաբար, $BC = DB = \dfrac{AB}{2}$: Թեորեմն ապացուցված է:

Պարզվում է, որ ճիշտ է նաև հակադարձ պնդումը.

Թեորեմ: Եթե ուղղանկյուն եռանկյան էջը հավասար է ներքնաձիգի կեսին, ապա այդ էջի դիմացի անկյունը 30° է:

Ապացուցում: Ենթադրենք՝ ABC ուղղանկյուն եռանկյունում $\angle C = 90^\circ$, $BC = \dfrac{AB}{2}$ (նկ. 165 ա): Ցույց տանք, որ $\angle A = 30^\circ$:



Նկար 165

Տանենք CD միջնագիծը: Այս կետի առաջին թեորեմից և $BC = \dfrac{AB}{2}$ պայմանից կհետևի, որ $CD = DB = BC$ (նկ. 165 բ): Հետևաբար, CDB եռանկյունը հավասարակողմ է: Վերջինից հետևում է, որ $\angle DBC = 60^\circ$ (ապացուցեք ինքնուրույն): Հետևաբար, $\angle A = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$: Թեորեմն ապացուցված է:

Դինամիկ մաթեմատիկա

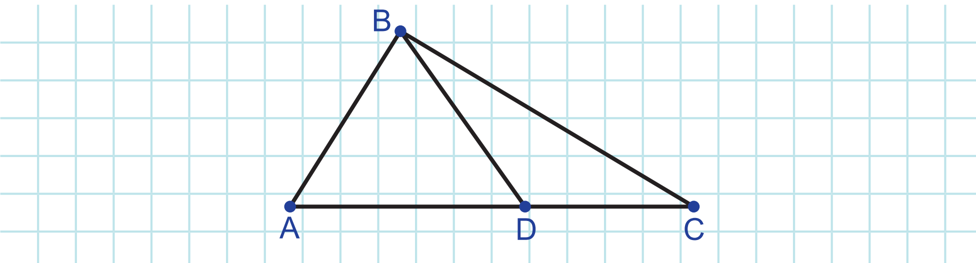
Դինամիկ մաթեմատիկայի ծրագրով կառուցեք ուղղանկյուն եռանկյուն (օգտվեք «Ուղղահայաց ուղիղ» գործիքից): Նշեք ներքնաձիգի միջնակետը և այն միացրեք ուղիղ անկյան գագաթին: Հաշվեք ներքնաձիգի երկարության կեսը: Ստեղծեք երկու գրություն, որոնցից մեկը ցույց է տալիս ներքնաձիգի երկարության կեսը, իսկ մյուսը՝ դրան տարված միջնագծի երկարությունը: Շարժելով եռանկյան տարբեր գագաթները՝ հետևեք գրություններին: Արեք եզրակացություն:

Ինտերակտիվ մոդել

Ուղղանկյուն եռանկյան 30°-ի դիմացի էջը

Հարցեր և առաջադրանքներ

312. Նկար 166-ում $\angle ABD = 34^\circ$, $\angle BAC = 52^\circ$: Գտեք $\angle BDC$-ն:



Նկար 166

313. ABC եռանկյան A անկյունը երկու անգամ մեծ է B անկյունից, AK-ն եռանկյան կիսորդն է: Ապացուցեք, որ $\angle AKC = 2 \cdot \angle B$:

314. ABC եռանկյան մեջ $\angle A = 40^\circ$, $\angle B = 69^\circ$: Գտեք $\angle C$-ն:

315. Հավասարասրուն եռանկյան հիմքի դիմացի անկյունը 120° է: Գտեք հիմքին առընթեր անկյունները:

316. Գտեք ABC եռանկյան անկյունները, եթե $\angle A : \angle B : \angle C = 1:3:5$:

317. Գտեք ABC եռանկյան անկյունները, եթե $\angle A : \angle B : \angle C = 1:2:3$:

318. ABC եռանկյան մեջ $\angle A = 40^\circ$, $\angle B = 70^\circ$, AK-ն կիսորդ է: Գտեք AKB անկյունը:

319. ABC եռանկյունում $\angle A = 20^\circ$, $\angle B = 75^\circ$: Ինչպիսի՞ն է ABC եռանկյունը:

320. Հայտնի է, որ ABC սուրանկյուն եռանկյան A անկյունը 20° է: Կարո՞ղ է B անկյունը փոքր լինել 70°-ից:

321. ABC եռանկյունում $\angle A = 25^\circ$, $\angle B = 47^\circ$: Ինչպիսի՞ն է ABC եռանկյունը:

322. Հայտնի է, որ ABC բութանկյուն եռանկյան C անկյունը 36° է: Կարո՞ղ է A անկյունը մեծ լինել 54°-ից:

323. Ամեն մի եռանկյուն ունի՞ ներքնաձիգ և էջեր:

324. ABC եռանկյունում $\angle A = 20^\circ$, $\angle B = 70^\circ$: Որո՞նք են ABC եռանկյան էջերը, ո՞րն է ներքնաձիգը:

325. Ուղղանկյուն եռանկյան սուր անկյուններից մեկը 21° է: Գտեք մյուս սուր անկյունը:

326. Ուղղանկյուն եռանկյան սուր անկյուններից մեկը չորս անգամ մեծ է մյուսից: Գտեք այդ անկյունները:

327. Ուղղանկյուն եռանկյան սուր անկյունները հարաբերում են ինչպես 2:7: Գտեք այդ անկյունները:

328. Գտեք ուղղանկյուն եռանկյան ներքնաձիգին տարված միջնագիծը, եթե ներքնաձիգը 16 սմ է:

329. Ուղղանկյուն եռանկյան ներքնաձիգին տարված միջնագիծը 6 սմ է, սուր անկյուններից մեկը՝ 30°: Գտեք այդ անկյան դիմացի էջը:

330. ABC ուղղանկյուն եռանկյան մեջ $\angle A = 30^\circ$, $BC = 7$ դմ: Գտեք AB ներքնաձիգը:

331. ABC ուղղանկյուն եռանկյունում $\angle A = 30^\circ$, AB ներքնաձիգը 17 սմ է: Գտեք BC-ն:

332. ABC ուղղանկյուն եռանկյան AB ներքնաձիգը 19 սմ է, BC-ն՝ 9,5 սմ: Գտեք $\angle A$-ն:

333. ABC ուղղանկյուն եռանկյան AB ներքնաձիգը երկու անգամ մեծ է AC էջից: Գտեք $\angle B$-ն:

334. ABC եռանկյունում $AB = BC$, $\angle A = 72^\circ$, AD-ն ABC եռանկյան կիսորդն է: Ապացուցեք, որ ABD և ADC եռանկյունները հավասարասրուն են:

335. Ապացուցեք, որ ցանկացած եռանկյունում կա անկյուն, որը ա) փոքր չէ 60°-ից, բ) մեծ չէ 60°-ից:

336. ABC եռանկյան BD միջնագիծը հավասար է AC կողմի կեսին: Ապացուցեք, որ $\angle B = 90^\circ$:

337. ABC եռանկյան BD միջնագիծը հավասար է AD հատվածին: Գտեք $\angle A$-ն, եթե $\angle DBC = 25^\circ$:

338. ABC եռանկյան AD և CE բարձրությունները հատվում են H կետում: Գտեք $\angle EHD$-ն, եթե $\angle B = 40^\circ$:

339. MK հիմքով MNK հավասարասրուն եռանկյունում $\angle M = 30^\circ$, $MN + NK = 40$ սմ: Գտեք NH բարձրությունը:

340. $AB = 20$ սմ ներքնաձիգով ABC ուղղանկյուն եռանկյունում $\angle A = 30^{\circ}$: Գտեք BCD եռանկյան պարագիծը, եթե CD–ն եռանկյան միջնագիծն է:

341. CH–ը ABC եռանկյան ուղիղ անկյան գագաթից տարված բարձրությունն է: Գտեք AB–ն, եթե այն երկու անգամ մեծ է BC–ից, իսկ $BH = 4$ սմ:

§14. Ուղղանկյուն եռանկյուն

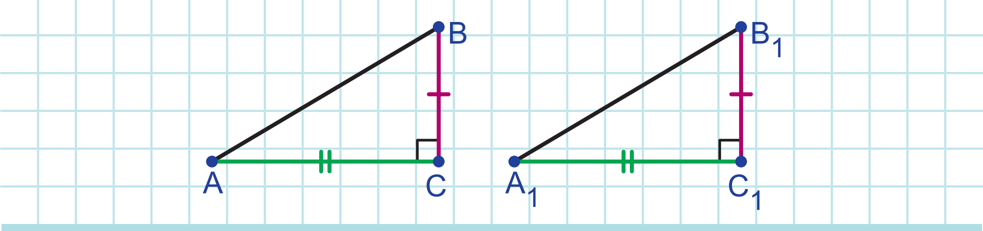
❐ 35. Ուղղանկյուն եռանկյունների հավասարության հայտանիշները

Ներկայացվող հայտանիշների մի մասը ձեզ արդեն հանդիպել է՝ 128 և 212 խնդիրները: Դրանք եռանկյունների հավասարության հայտանիշների հետևանքներ են: Բայց քանի որ ուղղանկյուն եռանկյունների հավասարությունը հիմնավորելու անհրաժեշտություն հաճախ է առաջանում, դրանք ներկայացնում ենք առանձին կետով՝ ավելացնելով ևս երեք հայտանիշ:

Եռանկյունների հավասարության I հայտանիշից հետևում է, որ.

Թեորեմ: (Ըստ երկու էջի) Եթե մի ուղղանկյուն եռանկյան էջերը համապատասխանաբար հավասար են մյուսի էջերին, ապա այդ եռանկյունները հավասար են (նկ. 167):

Իրոք, քանի որ այդ էջերի կազմած անկյունները երկու եռանկյուններում էլ 90° են, ապա կան եռանկյունների հավասարության I հայտանիշի պայմանները, և այդ եռանկյունները հավասար են:

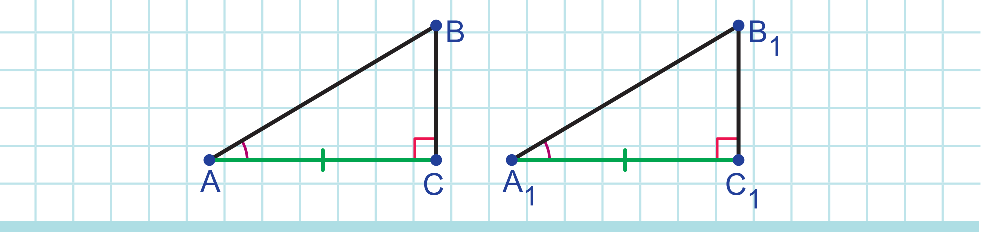


Նկար 167

Եռանկյունների հավասարության II հայտանիշից հետևում է, որ.

Թեորեմ: (Ըստ էջի ու դրան առընթեր սուր անկյան) Եթե մի ուղղանկյուն եռանկյան էջն ու դրան առընթեր սուր անկյունը համապատասխանաբար հավասար են մյուսի էջին ու դրան առընթեր սուր անկյանը, ապա այդ եռանկյունները հավասար են (նկ. 168):

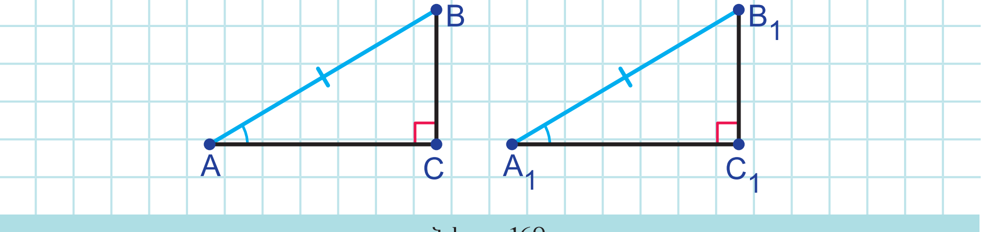
Իրոք, քանի որ հավասար էջերին առընթեր երկրորդ անկյուններն էլ են հավասար՝ երկու եռանկյուններում էլ 90° են, ապա կան եռանկյունների հավասարության II հայտանիշի պայմանները, և այդ եռանկյունները հավասար են:



Նկար 168

Թեորեմ: (Ըստ ներքնաձիգի ու սուր անկյան) Եթե մի ուղղանկյուն եռանկյան ներքնաձիգն ու սուր անկյունը համապատասխանաբար հավասար են մյուսի ներքնաձիգին ու սուր անկյանը, ապա այդ եռանկյունները հավասար են (նկ. 169):

Ապացուցում: Ենթադրենք՝ ABC և $A_1B_1C_1$ ուղղանկյուն եռանկյուններում $AB = A_1B_1$, $\angle A = \angle A_1$ և $\angle C = \angle C_1 = 90^\circ$:



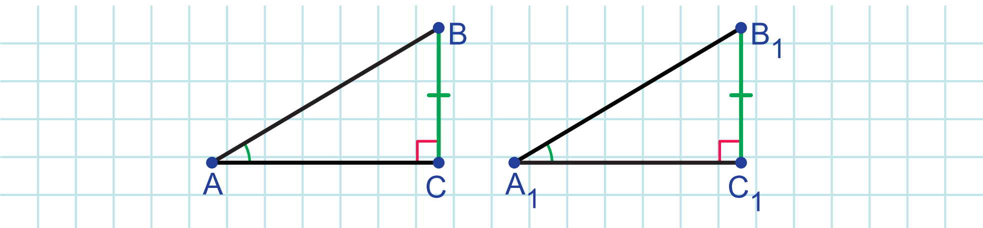
Նկար 169

Ապացուցենք, որ $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$:

Քանի որ $\angle A = \angle A_1$, իսկ ուղղանկյուն եռանկյան սուր անկյունների գումարը 90° է, ապա $\angle B = 90^\circ - \angle A = 90^\circ - \angle A_1 = \angle B_1$ ։ Այսպիսով, ABC եռանկյան AB կողմը և դրան առընթեր անկյունները համապատասխանաբար հավասար են $A_1B_1C_1$ եռանկյան A_1B_1 կողմին ու դրան առընթեր անկյուններին։ Հետևաբար, ըստ եռանկյունների հավասարության II հայտանիշի, $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$։ Թեորեմն ապացուցված է։

Թեորեմ: (Ըստ էջի ու դրա դիմացի անկյան) Եթե մի ուղղանկյուն եռանկյան էջն ու դրա դիմացի անկյունը համապատասխանաբար հավասար են մյուսի էջին ու դրա դիմացի անկյանը, ապա այդ եռանկյունները հավասար են (նկ. 170):

Ապացուցում: Ենթադրենք՝ ABC և $A_1B_1C_1$ ուղղանկյուն եռանկյուններում $BC = B_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$ և $\angle C = \angle C_1 = 90^\circ$ ։



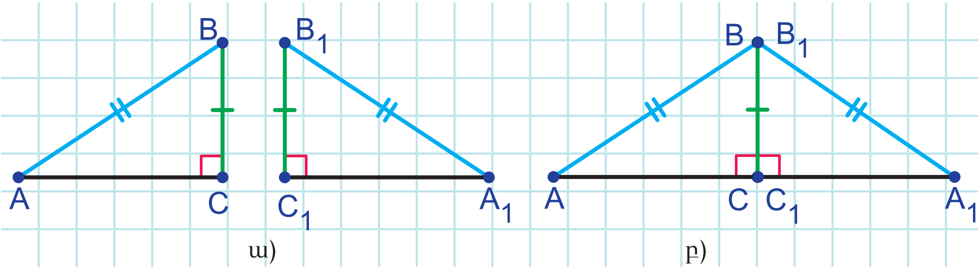
Նկար 170

Ապացուցենք, որ $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$ ։

Քանի որ $\angle A = \angle A_1$, իսկ ուղղանկյուն եռանկյան սուր անկյունների գումարը 90° է, ապա $\angle B = 90^\circ - \angle A = 90^\circ - \angle A_1 = \angle B_1$։ Այսպիսով, ABC եռանկյան BC էջը և դրան առընթեր սուր անկյունը համապատասխանաբար հավասար են $A_1B_1C_1$ եռանկյան B_1C_1 էջին ու դրան առընթեր սուր անկյանը։ Հետևաբար, ըստ նախորդ հայտանիշի, $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$ ։ Թեորեմն ապացուցված է։

Թեորեմ: (Ըստ էջի ու ներքնաձիգի) Եթե մի ուղղանկյուն եռանկյան էջն ու ներքնաձիգը համապատասխանաբար հավասար են մյուսի էջին ու ներքնաձիգին, ապա այդ եռանկյունները հավասար են (նկ. 171 ա):

Ապացուցում: Ենթադրենք՝ ABC և $A_1B_1C_1$ ուղղանկյուն եռանկյուններում $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$ և $\angle C = \angle C_1 = 90^\circ$:



Նկար 171

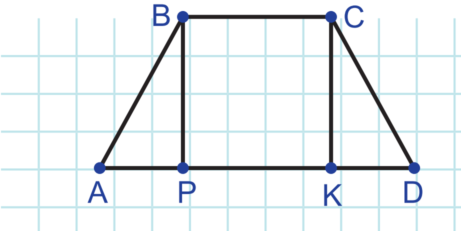
Ապացուցենք, որ $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$:

$A_1B_1C_1$ եռանկյունը տեղադրենք այնպես, որ դրա B_1C_1 էջը համընկնի իրեն հավասար BC էջի հետ (նկ. 171 բ): Քանի որ $\angle C = \angle C_1 = 90^\circ$, ապա AC և A_1C_1 կողմերը կկազմեն 180° անկյուն: Ուրեմն, ABA_1-ը կլինի հավասարասրուն եռանկյուն: Հետևաբար, դրա հիմքին առընթեր անկյունները հավասար են՝ $\angle A = \angle A_1$:

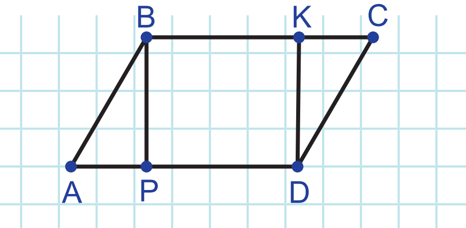
Այսպիսով, ABC եռանկյան BC էջը և դրա դիմացի անկյունը համապատասխանաբար հավասար են $A_1B_1C_1$ եռանկյան B_1C_1 էջին ու դրա դիմացի անկյանը: Ուրեմն, ըստ նախորդ հայտանիշի, այդ եռանկյունները հավասար են: Թեորեմն ապացուցված է:

Հարցեր և խնդիրներ

342. Նկար 172-ում $BP = CK$, $AP = KD$, $\angle APB = \angle DKC = 90^\circ$: Ապացուցեք, որ $AB = CD$:



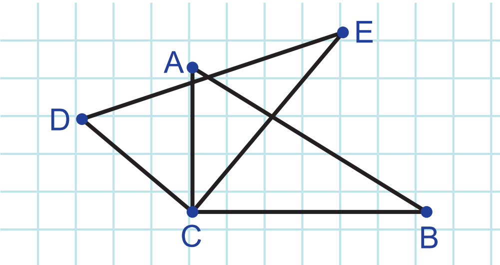
Նկար 172



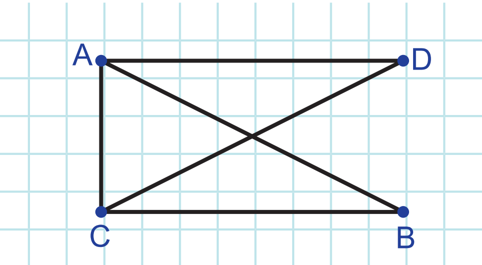
Նկար 173

343. Նկար 173-ում $BP = DK$, $AP = CK$, $\angle APB = \angle DKC = 90^\circ$: Ապացուցեք, որ $AB = CD$:

344. Նկար 174–ում $AC = DC$, $CB = CE$, $\angle DCE = \angle ACB = 90^{\circ}$: Ապացուցեք, որ $\angle CDE = \angle CAB$:



Նկար 174



Նկար 175

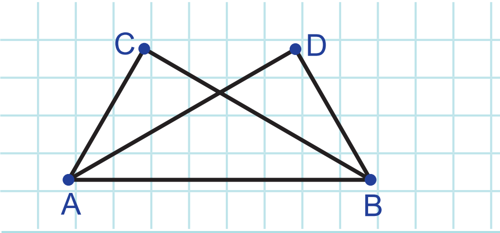
345. Նկար 172–ում $BP = CK$, $\angle ABP = \angle KCD$, $\angle APB = \angle DKC = 90^{\circ}$: Ապացուցեք, որ $AB = CD$:

346. Նկար 173–ում $AP = CK$, $\angle BAD = \angle KCD$, $\angle APB = \angle DKC = 90^{\circ}$: Ապացուցեք, որ $AB = CD$:

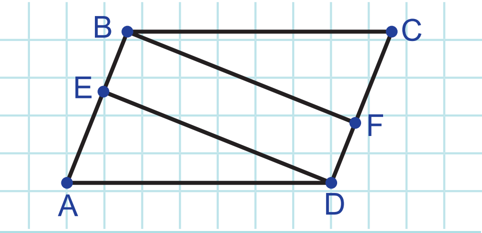
347. Նկար 175–ում $\angle BAC = \angle DCA$, $\angle CAD = \angle ACB = 90^{\circ}$: Ապացուցեք, որ $\angle ADC = \angle ABC$:

348. Նկար 173–ում $AB = CD$, $\angle BAD = \angle KCD$, $\angle APB = \angle DKC = 90^{\circ}$: Ապացուցեք, որ $BP = KD$:

349. Նկար 176–ում $\angle C = \angle D = 90^{\circ}$, $\angle ABC = \angle DAB$: Ապացուցեք, որ $AD = CB$:



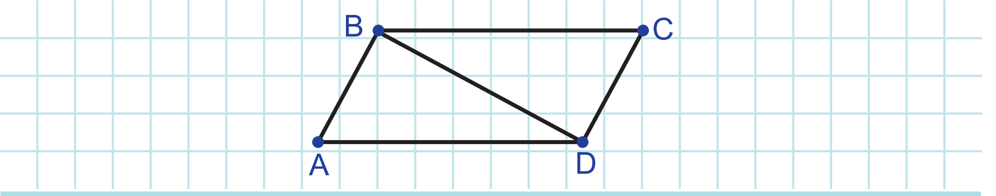
Նկար 176



Նկար 177

350. Նկար 177–ում $BC = AD$, $BF = DE$, $DE \perp AB$, $BF \perp CD$: Ապացուցեք, որ $AE = CF$:

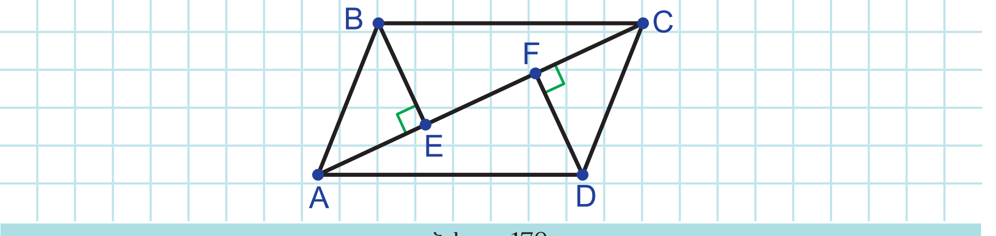
351. Նկար 178–ում $BC = AD$, BD–ն ուղղահայաց է և AB–ին, և CD–ին: Ապացուցեք, որ $AB = CD$:



Նկար 178

352. Եռանկյան կողմի միջնակետից մյուս կողմերին տարված ուղղահայացների հատվածները հավասար են: Ապացուցեք, որ այդ եռանկյունը հավասարասրուն է:

353. Նկար 179–ում $AB \parallel CD$, $BE = DF$, $BE \perp AC$, $DF \perp AC$: Ապացուցեք, որ $AB = CD$:



Նկար 179

354. BD–ն AC հիմքով ABC հավասարասրուն եռանկյան միջնագիծն է: Տարված են BDA եռանկյան DK և BDC եռանկյան DM կիսորդները: Ապացուցեք, որ KDM եռանկյունը հավասարասրուն ուղղանկյուն եռանկյուն է:

355. Ապացուցեք, որ շրջանագծի լարերը, որոնք հավասարահեռ են դրա կենտրոնից, հավասար են:

356. ABC և $A_1B_1C_1$ եռանկյունների BD և B_1D_1 բարձրությունները հավասար են: Ապացուցեք, որ $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$, եթե $\angle C = \angle C_1$, $AC = A_1C_1$:

357. ABC սուրանկյուն եռանկյան AA_1, BB_1, CC_1 բարձրությունները հատվում են H կետում: Ապացուցեք, որ CC_1B եռանկյունը հավասարասրուն է, եթե $BH = AC$:

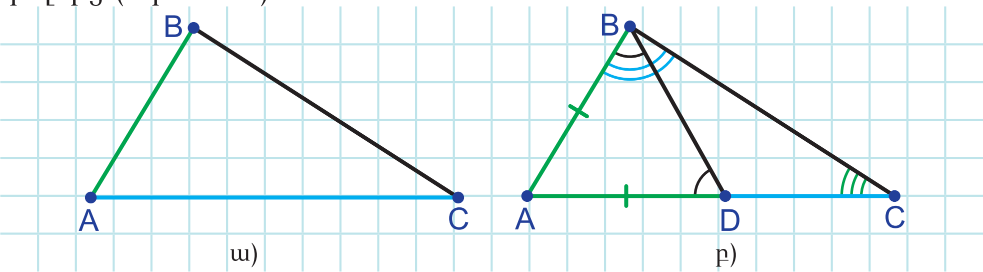
358. ABC սուրանկյուն եռանկյան AA_1, BB_1 բարձրությունները հատվում են H կետում: Գտեք $\angle B$–ն, եթե $BH = AC$:

§15. Առնչություններ եռանկյան կողմերի և անկյունների միջև

❒ 36. Թեորեմներ եռանկյան կողմերի և անկյունների միջև առնչությունների մասին

Թեորեմ: Եռանկյան ավելի մեծ կողմի դիմացի անկյունն ավելի մեծ է, և հակառակը՝ ավելի մեծ անկյան դիմացի կողմն ավելի մեծ է:

Ապացուցում: Ենթադրենք՝ ABC եռանկյան AC կողմը մեծ է AB կողմից (նկ. 180 ա):



Նկար 180

Ապացուցենք, որ $\angle B > \angle C$:

A կետից AC մեծ կողմի վրա տեղադրենք $AD = AB$ հատվածը (նկ. 180 բ): Քանի որ $AD = AB$, ապա $\angle ABD = \angle ADB$: Որպես BDC եռանկյան արտաքին անկյուն՝ $\angle ADB > \angle C$: Մյուս կողմից, քանի որ $AC > AB$, ապա D կետը A և C կետերի միջև է: Ուրեմն, $\angle B > \angle ABD$: Այսպիսով, $\angle B > \angle ABD = \angle ADB > \angle C$:

Հիմա ապացուցենք հակառակը: Ենթադրենք՝ ABC եռանկյունում $\angle B > \angle C$: Ցույց տանք, որ $AC > AB$:

Ենթադրենք հակառակը՝ $AC \le AB$: Եթե AC-ն հավասար լիներ AB-ին, ապա, որպես հավասարասրուն եռանկյան հիմքին առընթեր անկյուններ, B և C անկյունները կլինեին հավասար: Դա հակասում է $\angle B > \angle C$ պայմանին: Ուրեմն, $AC \ne AB$:

Եթե AC-ն փոքր լինի AB-ից, ապա այս թեորեմի առաջին մասից կհետևի, որ $\angle B < \angle C$: Սա նույնպես հակասում է $\angle B > \angle C$ պայմանին: Ուրեմն, $AC > AB$: Թեորեմն ապացուցված է:

Ձևակերպենք ու ապացուցեք այս թեորեմի երկու հետևանք:

Հետևանք 1: Ուղղանկյուն եռանկյան էջը փոքր է ներքնաձիգից:

Իրոք, քանի որ էջի դիմացի անկյունը սուր է, իսկ ներքնաձիգի դիմացի անկյունը՝ ուղիղ, ապա, ըստ նախորդ թեորեմի, էջը փոքր է ներքնաձիգից:

Հետևանք 2: Եթե եռանկյան երկու անկյունները հավասար են, ապա եռանկյունը հավասարասրուն է:

Սա՝ **հավասարասրուն եռանկյան հայտանիշը,** ձեզ հայտնի է կետ 21-ից: Հիմա դա կապացուցենք այլ ձևով՝ վերևում ապացուցված թեորեմից օգտվելով:

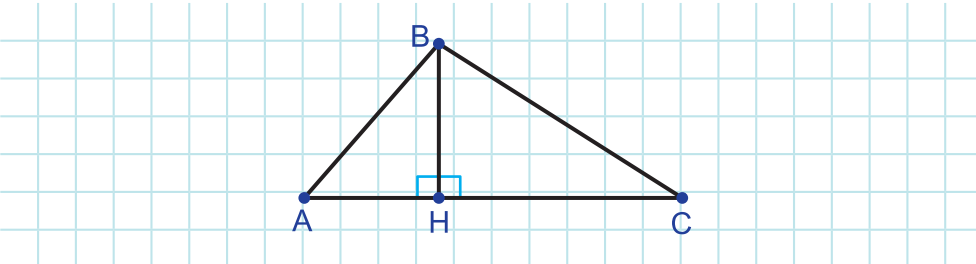
Ապացուցում: Ենթադրենք՝ ABC եռանկյունում $\angle A = \angle C$: Ապացուցենք, որ այդ անկյունների դիմացի կողմերը՝ AB-ն ու BC-ն հավասար են:

Ենթադրենք հակառակը՝ $AB \neq BC$: Դա կնշանակի, որ դրանցից մեկը փոքր է մյուսից: Որոշակիության համար ենթադրենք՝ $AB < BC$: Ըստ վերևում ապացուցած թեորեմի կհետևի, որ BC մեծ կողմի դիմացի A անկյունը մեծ է AB փոքր կողմի դիմացի C անկյունից: Վերջինս հակասում է $\angle A = \angle C$ պայմանին: Ուրեմն, $AB = BC$, այսինքն, եռանկյունը հավասարասրուն է: Հետևանք 2-ն ապացուցված է:

❐ 37. Եռանկյան անհավասարությունը

Թեորեմ: Եռանկյան ամեն մի կողմը փոքր է մյուս երկու կողմերի գումարից:

Ապացուցում: Ենթադրենք՝ ABC եռանկյունում $AB \leq BC \leq AC$ (նկ. 181): Պարզ է, որ BC կամ AB կողմը փոքր է մյուս երկու կողմերի գումարից: Ապացուցենք, որ $AC < AB + BC$:



Նկար 181

Տանենք BH բարձրությունը: Քանի որ $AC \geq BC, AC \geq AB$, ապա այդ բարձրության հիմքը՝ H–ը ընկած կլինի A և C կետերի միջև (հիմնավորեք ինքնուրույն): Դիտարկենք AHB ու CHB ուղղանկյուն եռանկյունները: Ըստ նախորդ կետի հետևանք 1–ի՝ $AH < AB$, $CH < BC$ (եռանկյան էջը փոքր է ներքնաձիգից): Հետևաբար, $AC = AH + CH < AB + BC$: Թեորեմն ապացուցված է:

Հարցեր և խնդիրներ

359. Աճման կարգով դասավորեք ABC եռանկյան անկյունները, եթե $AB = 14$ սմ, $BC = 10$ սմ, $AC = 7$ սմ:

360. Աճման կարգով դասավորեք ABC եռանկյան կողմերը, եթե $\angle A = 16^{\circ}$, $\angle B = 84^{\circ}$:

361. ABC և PKM եռանկյունները այնպիսին են, որ $\angle A > \angle P$: Կարելի՞ է պնդել, որ $BC > KM$:

362. ABC եռանկյան AC կողմի վրա K կետը վերցված է այնպես, որ $AK > KC$: Կարելի՞ է պնդել, որ $\angle ABK > \angle KBC$:

363. Ո՞րն է ABC եռանկյան ներքնաձիգը, եթե $AB = 15$ սմ, $BC = 8$ սմ, $AC = 17$ սմ:

364. Որո՞նք են ABC եռանկյան էջերը, եթե $AB = 12$ սմ, $BC = 13$ սմ, $AC = 5$ սմ:

365. BK–ն ABC եռանկյան բարձրությունն է: Ապացուցեք, որ $BK < AB$, $BK < BC$:

366. Ոչ հավասարասրուն եռանկյան նույն գագաթից տարված են միջնագիծ և բարձրություն: Ապացուցեք, որ բարձրությունը փոքր է միջնագծից:

367. ABC եռանկյունում $\angle A = \angle B$: Ինչպիսի՞ն է ABC եռանկյունը: Պատասխանը հիմնավորեք:

368. ABC եռանկյունում $\angle A = 40^\circ$, $\angle B = 100^\circ$: Ինչպիսի՞ն է ABC եռանկյունը: Պատասխանը հիմնավորեք:

369. ABC եռանկյունում $\angle A = 70^\circ$, $\angle B = 40^\circ$, $AB = 6$ սմ: Գտեք BC-ն:

370. Գոյություն ունի՞ այնպիսի եռանկյուն, որի կողմերն են 7 դմ, 8 դմ, 15 դմ: Պատասխանը հիմնավորեք:

371. Գոյություն ունի՞ այնպիսի եռանկյուն, որի կողմերն են 5 դմ, 15 դմ, 23 դմ: Պատասխանը հիմնավորեք:

372. Հավասարասրուն եռանկյան մի կողմը 8 սմ է, մյուսը՝ 3 սմ: Գտեք եռանկյան հիմքը:

373. Եռանկյան երկու անկյունները հավասար են: Գտեք այդ եռանկյան պարագիծը, եթե մի կողմը 23 սմ է, մյուսը՝ 11 սմ:

374. Ապացուցեք, որ եռանկյան ներսի կետի՝ գագաթներից ունեցած հեռավորությունների գումարը մեծ է եռանկյան կիսապարագծից:

375. Ապացուցեք, որ եռանկյան որևէ կողմին տարված միջնագիծը փոքր է մյուս երկու կողմերի կիսագումարից:

376. Ապացուցեք, որ եթե ABC եռանկյան AM միջնագիծը փոքր է BC կողմի կեսից, ապա A անկյունը բութ է:

377. Ապացուցեք, որ շրջանագծի տրամագիծը ամենաերկար լարն է:

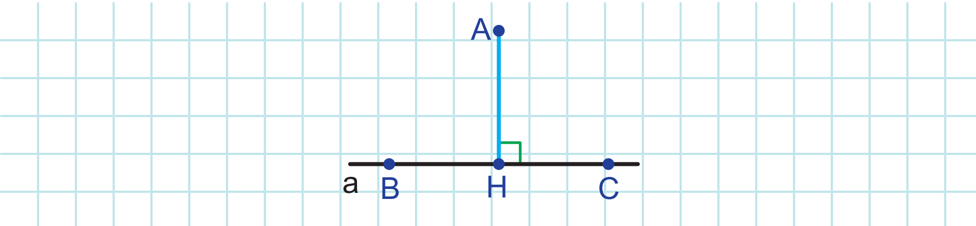
§16. Եռանկյան կողմերի և անկյունների միջև առնչությունների որոշ կիրառություններ

❐ 38. Կետի հեռավորությունն ուղղից

Մինչև կետի և ուղղի հեռավորությունը սահմանելը հիշենք, որ **երկու կետերի հեռավորություն** կոչվում է դրանք միացնող հատվածի երկարությունը:

> **Սահմանում: Ուղղին չպատկանող կետից ուղղին տարված ուղղահայացի երկարությունը կոչվում է այդ կետի և ուղղի հեռավորություն:**

Նկար 182-ի A կետի և a ուղղի հեռավորությունը հավասար է AH հատվածի երկարությանը:



Նկար 182

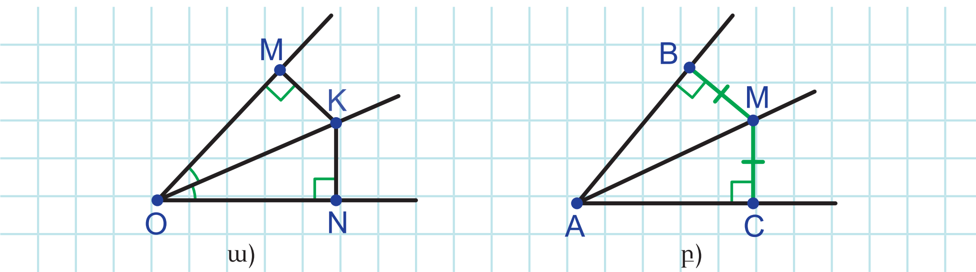
Եթե ուղղահայացի H հիմքը BC ճառագայթի կամ BC հատվածի վրա է, ապա AH հատվածի երկարությունը կոչվում է նաև A կետի ու BC ճառագայթի կամ A կետի և BC հատվածի հեռավորություն (նկ. 182):

Սահմանում: A կետը՝ a ուղղին տարված AH ուղղահայացի հիմքից տարբեր K կետին միացնող հատվածը կոչվում է այդ կետից ուղղին տարված թեք:

Նկատենք, որ կետից ուղղին տարված թեքը երկար է նույն կետից ուղղին տարված ուղղահայացից (ապացուցեք ինքնուրույն):

Թեորեմ: Չփռված անկյան կիսորդի ցանկացած կետ հավասարահեռ է այդ անկյան կողմերից և հակառակը՝ եթե անկյան ներսի կետը հավասարահեռ է անկյան կողմերից, ապա այն անկյան կիսորդի կետ է:

Ապացուցում: Նախ ապացուցենք թեորեմի առաջին մասը: Դիտարկենք O չփռված անկյունը: Ակնհայտ է, որ O կետը հավասարահեռ է անկյան կողմերից: Ենթադրենք՝ K-ն անկյան կիսորդի O-ից տարբեր որևէ կետ է (նկ. 183 ա):



Նկար 183

K կետից անկյան կողմերին տանեք KM և KN ուղղահայացները: Ապացուցենք, որ $KM = KN$:

KMO և KNO ուղղանկյուն եռանկյունները հավասար են ըստ ներքնաձիգի ու դրան առընթեր սուր անկյան (OK-ն դրանց ներքնաձիգն է, $\angle MOK = \angle NOK$): Ուրեմն, որպես հավասար անկյունների դիմացի կողմեր՝ $KM = KN$:

Հիմա ապացուցենք թեորեմի երկրորդ մասը: Ենթադրենք՝ A-ն չփռված անկյուն է, և դրա ներսի M կետը հավասարահեռ է այդ անկյան կողմերից՝ $MB = MC$ (նկ. 183 բ):

Ապացուցենք, որ M-ը A անկյան կիսորդի կետ է:

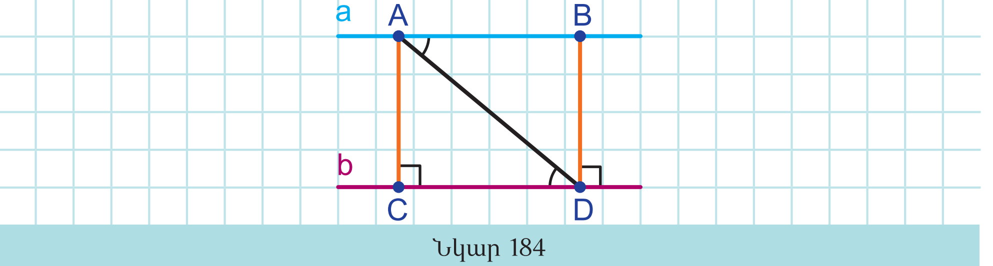
MBA և MCA ուղղանկյուն եռանկյունները հավասար են ըստ էջի ու ներքնաձիգի (AM-ն դրանց ներքնաձիգն է, $MB = MC$): Ուրեմն, որպես հավասար կողմերի դիմացի անկյուններ՝ $\angle BAM = \angle CAM$: Թեորեմն ապացուցված է:

❒ 39. Զուգահեռ ուղիղների հեռավորությունը

Թեորեմ: Երկու զուգահեռ ուղիղներից մեկի բոլոր կետերը հավասարահեռ են մյուս ուղղից:

Ապացուցում: Ենթադրենք՝ a և b ուղիղները զուգահեռ են: a ուղղի կամայական A և B կետերի հեռավորությունները b ուղղից համապատասխանաբար AC-ն ու BD-ն են (նկ. 184): Ցույց տանք, որ $AC = BD$:

Որպես a և b զուգահեռ ուղիղները AD հատողով հատելիս առաջացած խաչադիր անկյուններ՝ $\angle ADC = \angle DAB$: Բացի դրանից, քանի որ $a \parallel b$, իսկ $BD \perp b$, ապա $BD \perp a$: Ուրեմն, ABD-ն նույնպես ուղղանկյուն եռանկյուն է: ACD և ABD ուղղանկյուն եռանկյունները հավասար են ըստ ներքնաձիգի ու դրան առընթեր սուր անկյան: Հետևաբար, $AC = BD$: Թեորեմն ապացուցված է:



Նկար 184

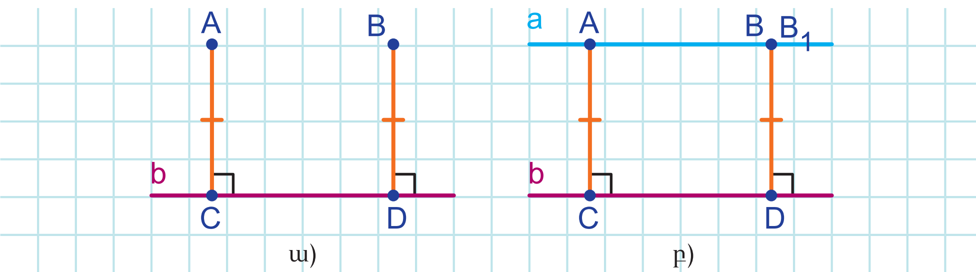
Սահմանում: Զուգահեռ ուղիղներից մեկի որևէ կետի հեռավորությունը մյուս ուղղից կոչվում է զուգահեռ ուղիղների հեռավորություն:

Ուրեմն, զուգահեռ ուղիղների հեռավորությունը գտնելու համար պետք է գտնել դրանցից մեկի որևէ կետի հեռավորությունը մյուս ուղղից:

Ճիշտ է նաև վերևում ապացուցված թեորեմի հակադարձ պնդումը:

Թեորեմ: Տրված ուղղի մի կողմի բոլոր կետերը, որոնք հավասարահեռ են այդ ուղղից, դրան զուգահեռ ուղղի վրա են:

Ապացուցում: Ենթադրենք՝ A և B կետերը հավասարահեռ են b ուղղից՝ $AC = BD$: Ցույց տանք, որ B կետը պատկանում է A կետով b ուղղին զուգահեռ տարված a ուղղին (նկ. 185 ա):

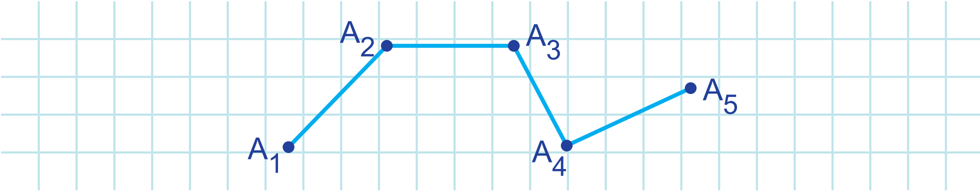


Նկար 185

A կետով b ուղղին զուգահեռ տարված a ուղիղը DB ճառագայթը կհատի ինչ-որ B_1 կետում (նկ. 185 բ): Ըստ վերևում ապացուցված թեորեմի՝ $AC = B_1D$: Բայց $AC = BD$, հետևաբար, $BD = B_1D$: Ուրեմն, DB ճառագայթի B և B_1 կետերը համընկնում են, այսինքն, B կետը պատկանում է a ուղղին: Թեորեմն ապացուցված է:

❒ 40. Բեկյալ

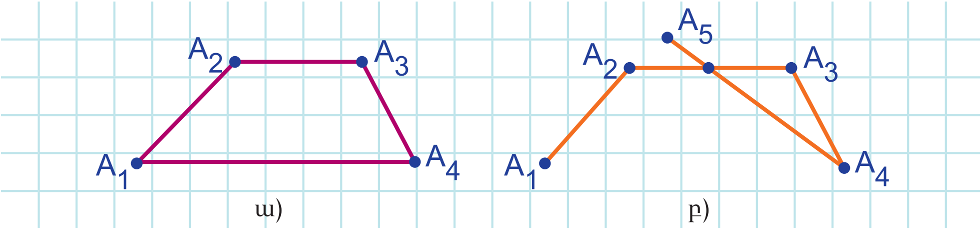
Սահմանում: $A_1, A_2, ..., A_n$ $(n > 2)$ **կետերը հաջորդաբար միացնող հատվածներից կազմված երկրաչափական պատկերը կոչվում է բեկյալ, եթե ընդհանուր գագաթ ունեցող հատվածները մի ուղղի վրա չեն:**
$A_1, A_2, ..., A_n$ **կետերը կոչվում են բեկյալի գագաթներ,** A_1 **և** A_n **կետերը՝ բեկյալի ծայրակետեր:**



Նկար 186

Նկար 186-ի բեկյալը կազմված է A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_5 հատվածներից: Բեկյալի գագաթներն են A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 կետերը, ծայրակետերը՝ A_1 և A_5 կետերը:

Սահմանում: Բեկյալը կոչվում է փակ, եթե դրա ծայրակետերը համընկնում են (նկ. 187ա):



Նկար 187

Սահմանում: Բեկյալը կազմող հատվածները կոչվում են օղակներ: Բեկյալը, որի ոչ հարևան օղակներն ընդհանուր կետ չունեն, կոչվում է պարզ բեկյալ:

Նկար 186-ի և նկար 187 ա)-ի բեկյալները պարզ բեկյալներ են, իսկ նկար 187 բ)-ի բեկյալը ոչ պարզ է:

Սահմանում: Բեկյալի բոլոր օղակների երկարությունների գումարը կոչվում է բեկյալի երկարություն:

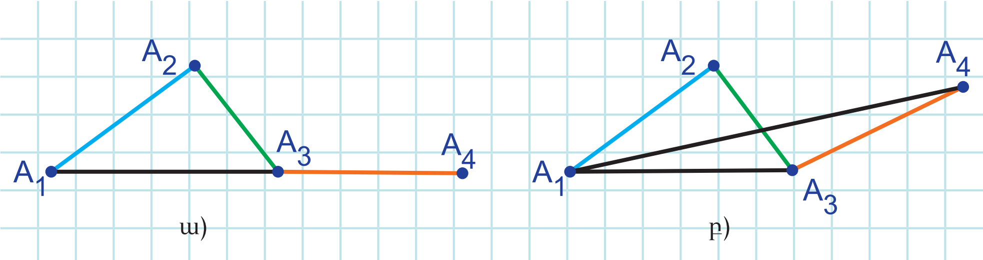
Եռանկյան անհավասարությունից հետևում է, որ.

Թեորեմ: Բեկյալի ծայրակետերի հեռավորությունը փոքր է բեկյալի երկարությունից:

Ապացուցում: Ակնհայտ է, որ փակ բեկյալի դեպքում պնդումը ճիշտ է: Ըստ եռանկյան անհավասարման՝ պնդումը ճիշտ է նաև երկու օղակ ունեցող բեկյալի դեպքում:

Ցույց տանք, որ պնդումը ճիշտ է երեք օղակ ունեցող բեկյալի դեպքում:

Ենթադրենք՝ տրված է $A_1A_2A_3A_4$ բեկյալը: A_1-ը միացնենք A_3-ին և A_4-ին: Հնարավոր է երկու դեպք՝ A_1, A_3, A_4 կետերը մի ուղղի վրա են, այդ կետերը մի ուղղի վրա չեն (նկ. 188):



Նկար 188

Առաջին դեպքում (նկ. 188 ա), ըստ եռանկյան անհավասարման, $A_1A_3 < A_1A_2 + A_2A_3$, իսկ $A_1A_4 = A_1A_3 + A_3A_4$: Ուրեմն, $A_1A_4 = A_1A_3 + A_3A_4 < A_1A_2 + A_2A_3 + A_3A_4$, այսինքն, պնդումը ճիշտ է:

Երկրորդ դեպքում (նկ. 188 բ), ըստ եռանկյան անհավասարման, $A_1A_3 < A_1A_2 + A_2A_3$, $A_1A_4 < A_1A_3 + A_3A_4$: Ուրեմն, $A_1A_4 < A_1A_3 + A_3A_4 < A_1A_2 + A_2A_3 + A_3A_4$, այսինքն, պնդումը ճիշտ է նաև այս դեպքում:

Այսպիսով, պնդումը ճիշտ է նաև երեք օղակ ունեցող բեկյալի համար:

Եթե բեկյալը չորս օղակ ունի, ապա միացնենք A_1-ը A_4-ին և A_5-ին: Օգտվելով արդեն վերևում ապացուցվածից՝ կունենանք, որ

$A_1A_4 < A_1A_2 + A_2A_3 + A_3A_4$: Մյուս կողմից, կամ $A_1A_5 = A_1A_4 + A_4A_5$ (եթե A_1, A_4, A_5 կետերը մի ուղղի վրա են), կամ $A_1A_5 < A_1A_4 + A_4A_5$ (եթե A_1, A_4, A_5 կետերը մի ուղղի վրա չեն): Երկու դեպքում էլ կունենանք, որ $A_1A_5 < A_1A_2 + A_2A_3 + A_3A_4 + A_4A_5$:

Ինչպես երեք օղակի դեպքից անցանք չորս օղակին, այդպես էլ չորս օղակի դեպքից կարող ենք անցնել հինգ օղակին: Հետևաբար, շարունակելով այդ մոտեցումը, կարող ենք ցույց տալ, որ պնդումը ճիշտ է ցանկացած բեկյալի համար: Թեորեմն ապացուցված է:

Հարցեր և առաջադրանքներ

378. a և b ուղիղները զուգահեռ են: a ուղղի վրա վերցված են A և B կետերը և տարված են b ուղղին AC թեքն ու BD ուղղահայացը: Համեմատեք AC և BD հատվածները:

379. Անկյան կիսորդի ինչ-որ կետի հեռավորությունն անկյան կողմերից մեկից 9 սմ է: Ինչքա՞ն է այդ կետի հեռավորությունը անկյան մյուս կողմից: Պատասխանը հիմնավորեք:

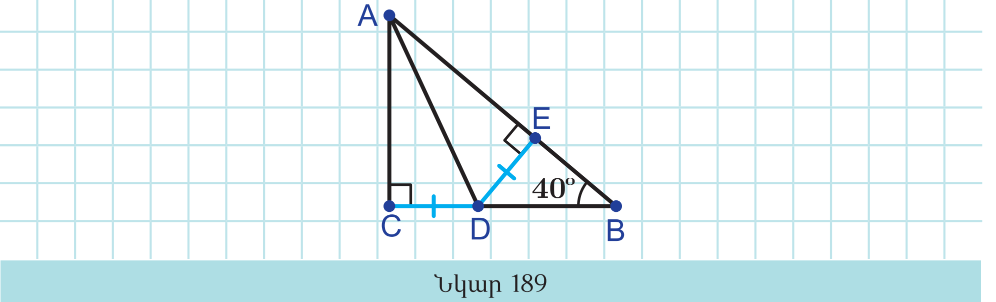
380. Անկյան կիսորդի A կետից անկյան կողմերին տարված են AB և AC ուղղահայացները: Ինչպիսի՞ն է BAC եռանկյունը: Պատասխանը հիմնավորեք:

381. BK-ն ABC անկյան կիսորդն է: Գտեք K կետի հեռավորությունը անկյան կողմերից, եթե $BK = 10$ սմ, $\angle B = 60^\circ$:

382. BAC անկյան ներսի P կետը հավասարահեռ է այդ անկյան կողմերից: Գտեք $\angle PAC$-ն, եթե $\angle BAC = 56^\circ$:

383. BAC անկյան ներսի F կետը հավասարահեռ է այդ անկյան կողմերից: Գտեք $\angle BAC$-ն, եթե $\angle FAC = 37^\circ$:

384. Ըստ նկար 189-ի տվյալների՝ գտեք CAD անկյունը:



Նկար 189

385. A կետից ինչ–որ ուղղի տարված են AB և AC թեքերն ու AD ուղղահայացը: Համեմատեք AB և DC հատվածները, եթե $\angle DAC = 45^\circ$:

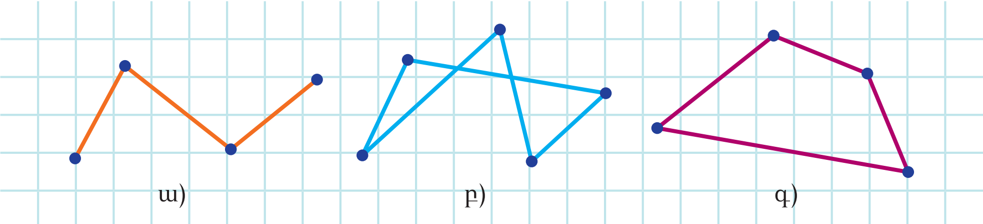
386. Ապացուցեք, որ եռանկյան կիսորդները հատվում են մի կետում:

387. P կետը հավասարահեռ է ABC եռանկյան կողմերից: Գտեք $\angle C$ –ն, եթե $\angle ABP = 28^\circ$, $\angle BAP = 17^\circ$:

388. ABC եռանկյան A և B անկյունների կիսորդները հատվում են K կետում: K կետով տարված է AC–ին զուգահեռ, որը AB և BC կողմերը հատում է համապատասխանաբար M և N կետերում: Գտեք MN–ը, եթե $AM = 2$ սմ, $CN = 3$ սմ:

389. AC հիմքով ABC հավասարասրուն եռանկյան A և C անկյունների կիսորդները հատվում են K կետում: Ապացուցեք, որ BK ուղիղը եռանկյան հիմքը բաժանում է հավասար մասերի:

390. Նկար 190–ի բեկյալներից ո՞րն է պարզ փակ բեկյալ:



Նկար 190

391. Բեկյալի օղակների երկարություններն են 6 սմ, 8 սմ և 11 սմ: Գտեք բեկյալի երկարությունը:

392. Կարո՞ղ է բեկյալի երկարությունը հավասար լինել դրա ծայրակետերի հեռավորությանը: Պատասխանը հիմնավորեք:

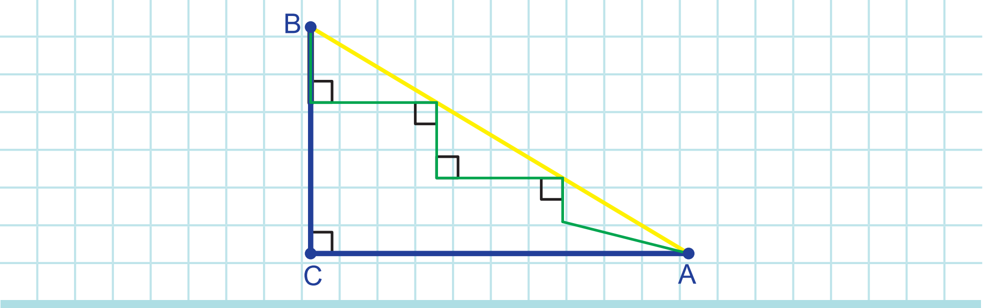
393. Գծեք բեկյալ, որի երկարությունը երկու անգամ մեծ է ծայրակետերի հեռավորությունից:

394. Գծեք բեկյալ, որի երկարությունը երեք անգամ մեծ է ծայրակետերի հեռավորությունից:

395. Բեկյալի օղակների երկարություններն են 5 սմ, 6 սմ և 8 սմ: Գնահատեք այդ բեկյալի ծայրակետերի հեռավորությունը:

396. A–ից B գնալու համար նույն արագությամբ շարժվող հետիոտներից առաջինն ընտրեց կապույտ ճանապարհը, երկրորդը՝

կանաչ ճանապարհը, երրորդը՝ դեղին ճանապարհը (նկ. 191): Ինչ հերթականությամբ նրանք տեղ հասան:



Նկար 191

§17. Կառուցման խնդիրներ

❐ 41*. Կետերի երկրաչափական տեղ

Սահմանում: Հարթության՝ որոշակի հատկությամբ օժտված բոլոր կետերից կազմված երկրաչափական պատկերը կոչվում է կետերի երկրաչափական տեղ:

Ապացուցելու համար, որ տվյալ հատկությամբ օժտված կետերի երկրաչափական տեղը նշված պատկերն է, պետք է ցույց տալ, որ.

ա) նշված պատկերի բոլոր կետերը օժտված են տվյալ հատկությամբ,

բ) բոլոր կետերը, որոնք ունեն տվյալ հատկությունը, պատկանում են նշված պատկերին:

Օրինակ, տրված կետից որոշակի հեռավորություն ունեցող կետերի երկրաչափական տեղը տրված կենտրոնով և տրված հեռավորությանը հավասար շառավղով շրջանագիծն է (տե՛ս շրջանագծի սահմանումը):

Հատվածի միջնուղղահայացը հարթության այն կետերի երկրաչափական տեղն է, որոնք հավասարահեռ են հատվածի ծայրակետերից (տե՛ս կետ 26-ը):

Անկյան ներսի՝ կողմերից հավասարահեռ կետերի երկրաչափական տեղը անկյան կիսորդն է (տե՛ս կետ 38-ը):

Կետերի երկրաչափական տեղի մեթոդը հաճախ է կիրառվում կառուցման խնդիրներ լուծելիս: Դա կիրառվում է այն դեպքերում, երբ 1) որոնելի պատկերը միաժամանակ պետք է բավարարի երկու պայմանի կամ 2) երբ որոնելի պատկերը կազմված է թե՛ մեկ, թե՛ մյուս պայմանին բավարարող կետերից:

1-ին դեպքում որոնելի պատկերը այդ կետերի երկրաչափական տեղերի հատումն է, 2-րդ դեպքում՝ կետերի երկրաչափական տեղերի միավորումը:

❐ 42. Եռանկյան կառուցումն ըստ երեք տարրերի

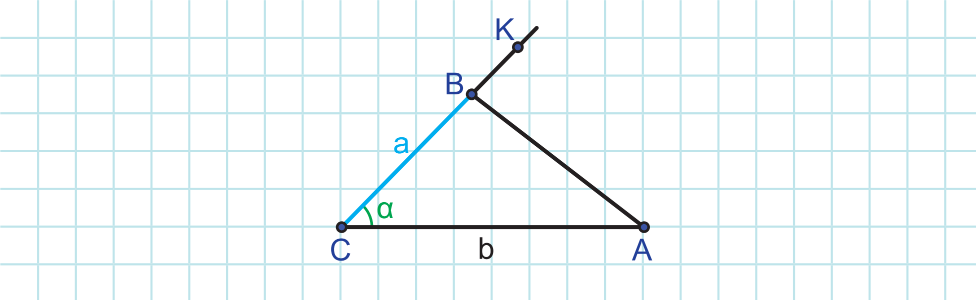
Կետ 27-ում և 28-ում մենք լուծեցինք տրված հատվածին հավասար հատված, տրված անկյանը հավասար անկյուն, տրված կետից տրված ուղղին ուղղահայաց կառուցելու և այլ խնդիրներ: Այստեղ և հետագայում, կառուցման նոր խնդիր լուծելիս, չենք կրկնի արդեն հայտնի խնդիրների կառուցման քայլերը:

Խնդիր 1: Կառուցեք եռանկյուն ըստ երկու կողմի և դրանց կազմած անկյան:

Լուծում: Տրված են երկու հատված՝ a-ն ու b-ն և $\angle O = \alpha$ անկյունը: Պետք է կառուցել եռանկյուն, որի կողմերը հավասար են այդ հատվածներին, իսկ այդ կողմերի կազմած անկյունը α է: Պարզ է, որ եթե $\alpha = 180^\circ$, ապա խնդիրը լուծում չունի:

Պարզ է նաև, որ եթե խնդիրը լուծում ունի, ապա այն միակն է, քանի որ կառուցված եռանկյունները, ըստ եռանկյունների հավասարության I հայտանիշի, կլինեն հավասար:

Տանենք ուղիղ և դրա վրա կառուցենք տրված հատվածներից, օրինակ, b-ին հավասար AC հատվածը (նկ.192):



Նկար 192

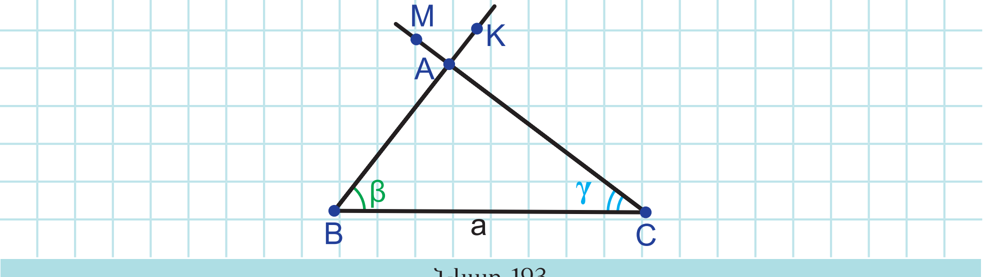
Կառուցենք O անկյանը հավասար ACK անկյունը: CK ճառագայթի վրա տեղադրենք $CB = a$ հատվածը: ABC եռանկյունը կլինի որոնելի եռանկյունը:

Խնդիր 2: Կառուցեք եռանկյուն ըստ կողմի և դրան առընթեր երկու անկյան:

Լուծում: Տրված են հատված a–ն և երկու անկյուն՝ $\angle O = \alpha$, $\angle P = \beta$: Պետք է կառուցել եռանկյուն, որի մի կողմը a է, իսկ այդ կողմին առընթեր անկյունները α ու β են: Պարզ է, որ եթե $\alpha + \beta \geq 180^{\circ}$, ապա խնդիրը լուծում չունի:

Պարզ է նաև, որ եթե խնդիրը լուծում ունի, ապա այն միակն է, քանի որ կառուցված եռանկյունները, ըստ եռանկյունների հավասարության II հայտանիշի, կլինեն հավասար:

Տանենք ուղիղ և դրա վրա կառուցենք տրված հատվածին հավասար BC հատվածը (նկ. 193):



Նկար 193

Կառուցենք O անկյանը հավասար CBK անկյունը և P անկյանը հավասար BCM անկյունը: BK և CM ճառագայթների հատման կետը նշանակենք A–ով: ABC եռանկյունը կլինի որոնելի եռանկյունը:

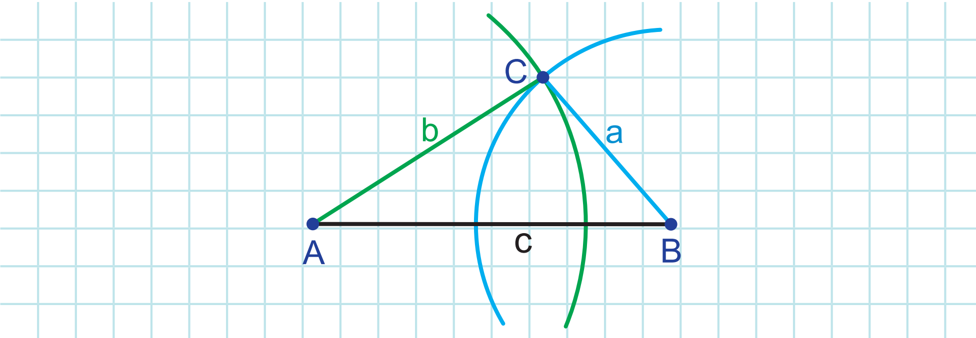
Խնդիր 3: Կառուցեք եռանկյուն ըստ երեք կողմերի:

Լուծում: Տրված է երեք հատված՝ a–ն, b–ն, c–ն: Պետք է կառուցել եռանկյուն, որի կողմերը հավասար են այդ հատվածներին: Պարզ է, որ եթե տրված հատվածների երկարությունները չեն բավարարում եռանկյան անհավասարությանը, ապա այդպիսի կողմերով եռանկյուն գոյություն չունի: Ինչը նշանակում է, որ այդ դեպքում խնդիրը լուծում չունի:

Պարզ է, նաև, որ եթե խնդիրը լուծում ունի, ապա այն միակն է, քանի որ կառուցված եռանկյունները, ըստ եռանկյունների հավասարության III հայտանիշի, կլինեն հավասար:

Ենթադրենք՝ $a \le b \le c$ և a, b, c հատվածների երկարությունները բավարարում են եռանկյան անհավասարությանը:

Տանենք ուղիղ և դրա վրա կառուցենք c–ին հավասար AB հատվածը (նկ. 194):



Նկար 194

Կառուցվող եռանկյան երրորդ գագաթ կլինի այն կետը, որը. 1) A կետից b հեռավորության վրա է, 2) B կետից a հեռավորության վրա է: Առաջին պայմանին բավարարող կետերի երկրաչափական տեղը A կենտրոնով ու b շառավղով շրջանագիծն է: Երկրորդ պայմանին բավարարող կետերի երկրաչափական տեղը՝ B կենտրոնով ու a շառավղով շրջանագիծը: Ուրեմն, որպես եռանկյան երրորդ գագաթ կարող ենք վերցնել այդ շրջանագծերի հատման որևէ կետ:

Քանի որ $a \le b \le c$, ապա առաջին շրջանագծի կենտրոնը երկրորդ շրջանագծից դուրս է կամ դրա վրա է, իսկ երկրորդ շրջանագծի կենտրոնը առաջին շրջանագծից դուրս է կամ դրա վրա է: Քանի որ a, b, c հատվածների երկարությունները բավարարում են եռանկյան անհավասարությանը, ապա, օրինակ, առաջին շրջանագծի՝ AB–ի հետ հատման կետը երկրորդ շրջանագծի ներսում է: Ուրեմն, շրջանագծերը կհատվեն: Դրանց հատման կետերից մեկն էլ՝ C–ն, կվերցնենք որպես եռանկյան երրորդ գագաթը:

❒ 43*. Կառուցման խնդիրների լուծման փուլերը

Կառուցման խնդրի լուծումը սովորաբար ենթադրում է չորս փուլ՝ 1) վերլուծություն, 2) կառուցում, 3) ապացուցում, 4) հետազոտություն:

Այս սխեման բացարձակ կամ անփոփոխ չէ: Միշտ չէ, որ այդ փուլերը խստորեն առանձնացվում են ու ամեն խնդիր լուծելիս չէ, որ պետք է անցնել բոլոր այդ փուլերով: Պարզ խնդիրների դեպքում որոշ փուլեր կարող են բաց թողնվել կամ միաձուլվել: Մինչև հիմա կառուցման խնդիրները լուծելիս մենք այդպես էլ վարվել ենք:

1. **Վերլուծություն.** Կառուցման խնդրի լուծման նախապատրաստական և միևնույն ժամանակ ամենակարևոր փուլն է, քանի որ հենց դա է տալիս խնդրի լուծման բանալին: Այս փուլում ենթադրվում է, որ խնդիրը լուծված է: Արվում է սխեմատիկ գծագիր և դրա օգնությամբ վերլուծվում են որոնելի պատկերի տարրերի և տվյալների միջև եղած կապերը:
   Այս փուլի վերջնական նպատակն է գտնել այն քայլերի հաջորդականությունը՝ ալգորիթմը, որի արդյունքում կստացվի պահանջվող հատկություններով պատկեր:
2. **Կառուցում.** Այս փուլը սովորաբար ենթադրում է նախորդ փուլում հայտնաբերած ալգորիթմի իրականացում՝ կառուցման գործիքների միջոցով: Ավելի բարդ խնդրի դեպքում հղում են անում կառուցման հիմնական խնդիրներին կամ արդեն լուծված խնդրին:

Բարդ խնդրի դեպքում էլ ավելի հարմար է դառնում կառուցումն իրականացնել դինամիկ մաթեմատիկայի ծրագրով, քանի որ, օրինակ, անկյան կիսորդի, հատվածի միջնուղղահայացի, ուղղահայաց ուղղի և այլ առկա գործիքները հնարավորություն են տալիս դրանց կառուցումներն անել մեկ քայլով և հղում չանել հիմնական խնդիրներին:

3. **Ապացուցում.** Այս փուլում ապացուցվում է, որ կառուցված պատկերը բավարարում է խնդրի բոլոր պայմաններին: Ապացուցումը ենթադրում է, որ կառուցման ամեն մի քայլն իրականացնելի է:
4. **Հետազոտում.** Կառուցելիս սովորաբար սահմանափակվում են մեկ կոնկրետ լուծում գտնելով, և ենթադրվում է, որ կառուցման բոլոր քայլերն իրագործելի են:
   Խնդրի ամբողջական լուծման համար նաև անհրաժեշտ է պարզել, որ կարող են լինել դեպքեր, երբ կառուցումը իրագործելի չէ, այսինքն, դեպքեր, երբ խնդիրը լուծում չունի:
   Իսկ լուծում ունենալու դեպքում պետք է պարզել լուծումների քանակը: Նշենք, որ կառուցված պատկերները համարվում են տարբեր, եթե դրանք հավասար չեն:

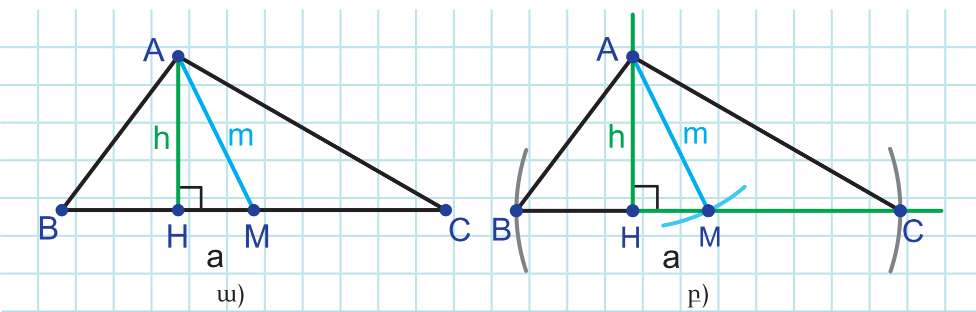
Լուծենք մի խնդիր վերևում ներկայացված քայլաշարով:

Խնդիր: Կառուցեք եռանկյուն՝ ըստ կողմի և դրան տարված բարձրության ու միջնագծի:

Լուծում: Նախ տրված կողմը նշանակենք a–ով, դրան տարված բարձրությունը՝ h–ով, իսկ միջնագիծը՝ m–ով:

Վերլուծություն: Ենթադրենք՝ խնդիրը լուծված է, կառուցված է ABC եռանկյունը, որում $BC = a$, $AH = h$, $AM = m$ (նկ. 195 ա): AHM եռանկյունը ուղղանկյուն եռանկյուն է, որի էջն ու ներքնաձիգը տրված են: Հետևաբար, դա հնարավոր է կառուցել: Նկատենք նաև, որ եթե AHM եռանկյունը կառուցված է, ապա B և C գագաթները կարելի է ստանալ՝ կառուցելով HM ուղղի և M կենտրոնով ու $\frac{a}{2}$ շառավղով շրջանագծի հատման կետերը:

Կառուցում: Կառուցենք H ուղիղ անկյունը, դրա մի կողմի վրա տեղադրենք $AH = h$ հատվածը (նկ. 195 բ):



Նկար 195

Կառուցենք A կենտրոնով ու m շառավղով շրջանագիծ և M–ով նշանակենք այդ շրջանագծի ու H անկյան երկրորդ կողմի հատման կետը: Կառուցենք M կենտրոնով ու $\frac{a}{2}$ շառավղով շրջանագիծ: Այդ շրջանագծի ու HM ուղղի հատման կետերը նշանակենք B–ով ու C–ով: Կառուցենք AB և AC հատվածները:

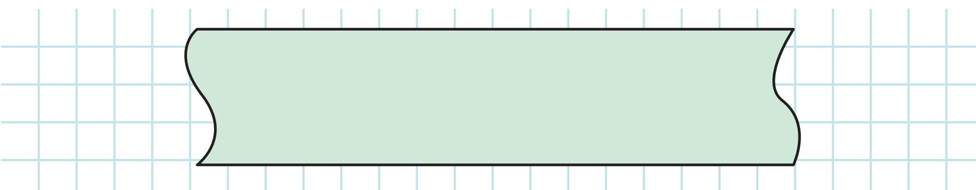
Ապացուցում: Պարզ է, որ կառուցված ABC եռանկյունը բավարարում է խնդրի պայմաններին, քանի որ դրա BC կողմը a է, այդ կողմին տարված բարձրությունը՝ $AH = h$, միջնագիծը՝ $AM = m$:

Հետազոտում: Պարզ է, որ գոյություն չունի եռանկյուն, որի միջնագիծը փոքր լինի նույն գագաթից տարված բարձրությունից: Ուրեմն, եթե $m < h$, ապա խնդիրը լուծում չունի: Եթե $m = h$, ապա եռանկյունը կլինի հավասարասրուն, և խնդիրն ունի միակ լուծում (ապացուցեք ինքնուրույն)։ Ցույց տանք, որ եթե $m > h$, ապա խնդիրը նորից ունի միակ լուծում։

Իրոք, ենթադրենք՝ ABC և $A_1B_1C_1$ եռանկյուններում $BC = B_1C_1 = a$, $AH = A_1H_1 = h$, $AM = A_1M_1 = m$։ AHM և $A_1H_1M_1$ ուղղանկյուն եռանկյունները հավասար են ըստ էջի ու ներքնաձիգի։ Հետևաբար, $\angle AMH = \angle A_1M_1H_1$։ Բացի դրանից, $AM = A_1M_1 = m, BM = B_1M_1 = \frac{a}{2}$։ Ուրեմն, ըստ եռանկյունների հավասարության I հայտանիշի, $\Delta AMB = \Delta A_1M_1B_1$։ Վերջինից հետևում է, որ $AB = A_1B_1$, $\angle B = \angle B_1$։ Ունեինք նաև, որ $BC = B_1C_1$։ Ուրեմն, ըստ եռանկյունների հավասարության I հայտանիշի, $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$։

Հարցեր և խնդիրներ

397. Զուգահեռ կողմերով և առանց բաժանումների քանոնով (նկ. 196) կառուցեք տրված անկյան կիսորդը։



Նկար 196

398. Զուգահեռ կողմերով և առանց բաժանումների քանոնով (նկ. 196) կառուցեք տրված երկու կետերով անցնող զուգահեռ հատվածներ, եթե այդ կետերի հեռավորությունը մեծ է քանոնի լայնությունից, բայց փոքր է դրա երկարությունից։

399. Զուգահեռ կողմերով և առանց բաժանումների քանոնով (նկ.196) կառուցեք տրված հատվածի միջնակետը, որի երկարությունը մեծ է քանոնի լայնությունից, բայց փոքր է դրա երկարությունից։

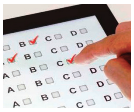
400. Զուգահեռ կողմերով և առանց բաժանումների քանոնով (նկ. 196) կառուցեք տրված սուր անկյունից երկու անգամ մեծ անկյուն։

401. Կառուցեք տրված շառավղով շրջանագիծ, որը տրված ուղղից անջատում է տրված հատվածին հավասար հատված։

402. Կառուցեք ուղղանկյուն եռանկյուն՝ ըստ ուղիղ անկյան գագաթից տարված միջնագծի ու էջի:

403. Կառուցեք ուղղանկյուն եռանկյուն ըստ ներքնաձիգի ու ներքնաձիգին տարված բարձրության:

404. Տրված է սուր անկյուն և դրա կողմերից մեկի վրա նշված է A կետը: Նույն կողմի վրա կառուցեք մյուս կողմից ու A կետից հավասարահեռ կետ:



Համակարգչային թեմատիկ թեստ

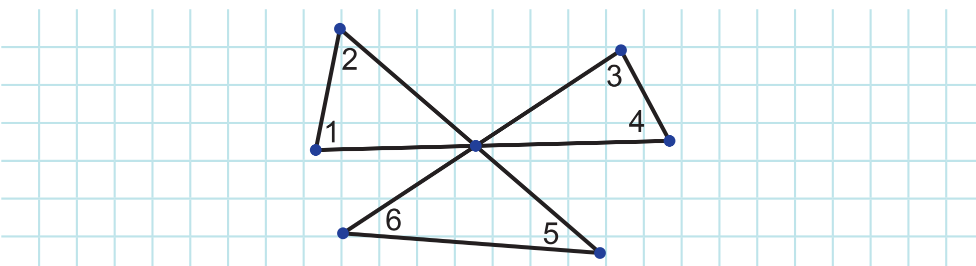
Ներբեռնման հղումը՝ https://mathnet.am/etest/7-4.zip

Լրացուցիչ խնդիրներ

405. Գտեք ABC եռանկյան անկյունները, եթե A գագաթով անցնող ուղիղը BC կողմը հատում է M կետում, ընդ որում՝ $BM = AB$, $\angle BAM = 35^\circ$, $\angle MAC = 15^\circ$:

406. Եռանկյան արտաքին անկյուններից մեկը 150° է: Գտեք եռանկյան՝ դրան ոչ կից անկյունները, եթե դրանցից մեկը 20°-ով մեծ է մյուսից:

407. Գտեք նկար 197-ի 1, 2, 3, 4, 5, 6 անկյունների գումարը:



Նկար 197

408. Ինչպիսի՞ն է եռանկյունը, եթե դրա ցանկացած երկու անկյունների գումարը մեծ է 90°-ից:

409. Ապացուցեք, որ եթե եռանկյան արտաքին անկյան կիսորդը զուգահեռ է եռանկյան կողմերից մեկին, ապա եռանկյունը հավասարասրուն է:

410. AM հատվածը AC հիմքով ABC հավասարասրուն եռանկյունը տրոհում է AB և MC հիմքերով հավասարասրուն եռանկյունների: Գտեք անկյուն B–ն:

411. ABC եռանկյան A և C անկյունների կիսորդները հատվում են K կետում: Գտեք AKC անկյունը, եթե $\angle B = \alpha$:

412. Ապացուցեք, որ ոչ հավասարասրուն ուղղանկյուն եռանկյան ուղիղ անկյան գագաթից տարված բարձրությամբ ու միջնագծով կազմած անկյունն ուղիղ անկյան կիսորդով բաժանվում է երկու հավասար մասի:

413. Գոյություն ունի՞ եռանկյուն, որի երկու կիսորդները փոխուղղահայաց են:

414. Գոյություն ունի՞ եռանկյուն, որի կիսորդներից մեկն անցնում է մյուս կիսորդի միջնակետով:

415. Ապացուցեք, որ հավասարակողմ եռանկյան միջնագծերը հատման կետով բաժանվում են 2:1 հարաբերությամբ՝ հաշված եռանկյան գագաթներից:

416. Ուղղանկյուն եռանկյան սուր անկյունը 30° է, իսկ ներքնաձիգը՝ 16 սմ: Գտեք ուղիղ անկյան գագաթից տարված բարձրությամբ ներքնաձիգը տրոհելուց առաջացած հատվածների երկարությունները:

417. ABC եռանկյունում $\angle C = 90^{\circ}$, $\angle A = 30^{\circ}$, CH–ը եռանկյան բարձրությունն է, իսկ CM–ը՝ միջնագիծը: Գտեք AB կողմի երկարությունը, եթե $HM = 8$ սմ:

418. Ուղղանկյուն եռանկյան սուր անկյունը 30° է: Ապացուցեք, որ ուղիղ անկյան գագաթից տարված բարձրությունն ու միջնագիծը այդ անկյունը բաժանում են երեք հավասար մասի:

419. ABC եռանկյունում $\angle C = 90^{\circ}$, $\angle A = 30^{\circ}$, իսկ CM–ը եռանկյան միջնագիծն է: M կետով AB–ին տարված ուղղահայաց ուղիղը AC կողմը հատում է K կետում: Ապացուցեք, որ $AC = 3 \cdot MK$:

420. Ուղղանկյուն եռանկյան ներքնաձիգին տարված բարձրությունը 3 սմ է: Գտեք ներքնաձիգը, եթե եռանկյան անկյուններից մեկը 15° է:

421. ABC եռանկյան B անկյունը 120° է, AD–ն ու BE–ն այդ եռանկյան կիսորդներն են: Ապացուցեք, որ D կետը հավասարահեռ է AB և BE ուղիղներից:

422. ABC եռանկյան B անկյունը 120° է, AD-ն ու BE-ն այդ եռանկյան կիսորդներն են: Ապացուցեք, որ ED-ն BEC անկյան կիսորդն է:

423. ABC եռանկյան B անկյունը 120° է, AD-ն, BE-ն ու CF-ը այդ եռանկյան կիսորդներն են: Ապացուցեք, որ FED եռանկյունը ուղղանկյուն եռանկյուն է:

424. ABC հավասարասրուն եռանկյան B անկյունը 108° է: D կետով AD կիսորդին ուղղահայաց տարված ուղիղը AC կողմը հատում է M կետում: Ապացուցեք, որ $BD = DM$:

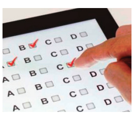
425. Եռանկյան պարագիծը 40 սմ է: Կարո՞ղ է այդ եռանկյան կողմերից մեկը լինել ա) 10սմ, բ) 20 սմ, գ) 25 սմ:

426. Ապացուցեք, որ եթե ABC եռանկյան AM միջնագիծը մեծ է BC կողմի կեսից, ապա A անկյունը սուր է:

427. Կառուցեք եռանկյուն ըստ կողմի, դրա դիմացի անկյան ու մյուս կողմերի գումարի:

428. Կառուցեք եռանկյուն ըստ պարագծի ու երկու անկյան:

429. Տարվել են AC հիմքով ABC հավասարասրուն եռանկյան AD, BK, CN կիսորդները, հետո ամեն ինչ ջնջել են, բացի D, K, N կետերից: Վերականգնեք եռանկյունը:



Համակարգչային ամփոփիչ թեստ

Ներբեռնման հղումը՝ https://mathnet.am/etest/7-A.zip

Ուսումնասիրելով այս գլուխը՝

- Սովորեցիք և կիրառեցիք եռանկյան անկյունների գումարի մասին թեորեմը:
- Սովորեցիք եռանկյան կողմերի և անկյունների միջև առնչությունների մասին թեորեմը, կիրառեցիք այն խնդիրներ լուծելիս:
- Սովորեցիք ուղղանկյուն եռանկյան որոշ հատկություններ և հավասարության հայտանիշները, կիրառեցիք խնդիրներ լուծելիս:
- Իմացաք եռանկյան անհավասարությունը, անկյան կիսորդի հատկությունը, կիրառեցիք դրանք խնդիրներ լուծելիս:
- Իմացաք կետի և ուղղի, զուգահեռ ուղիղների հեռավորության, բեկյալի սահմանումները, բեկյալի հատկությունը:
- Սովորեցիք կարկինով ու քանոնով կառուցել եռանկյուն՝ ըստ դրա երեք տարրերի:

Խնդիրներ առավել հետաքրքրվածների համար

430. ABC և $A_1B_1C_1$ եռանկյուններում AM և A_1M_1 միջնագծերը հավասար են: Բացի այդ, $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$: Ապացուցեք, որ $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$:

431. AK-ն AC հիմքով հավասարասրուն եռանկյան կիսորդն է, ընդ որում՝ $BK = AC$: Ապացուցեք, որ $AK = AC$:

432. ABC եռանկյունում $\angle B = 20^\circ$, $\angle C = 40^\circ$: AK կիսորդը 2 սմ է: Գտեք BC և AB կողմերի տարբերությունը:

433. Գտեք ուղղանկյուն եռանկյան սուր անկյունները, եթե եռանկյան կողմերի արտադրյալը 4 անգամ մեծ է բարձրությունների արտադրյալից:

434. ABC հավասարասրուն $(AB = BC)$ ուղղանկյուն եռանկյան ներսում վերցրած է այնպիսի M կետ, որ $\angle MAB = \angle MBA = 15^\circ$: Գտեք $\angle AMC$-ն:

435. ABC եռանկյան B և C անկյունները համապատասխանաբար հավասար են 15° և 30°: A գագաթից տարված է AB-ին ուղղահայաց ուղիղ, որը BC-ի հետ հատվում է D կետում: Ապացուցեք, որ $BD = 2 \cdot AC$:

436. ABO և CDO եռանկյունները դասավորված են այնպես, որ O-ն պատկանում է AD հատվածին, իսկ B և C կետերը AD ուղղի միևնույն կողմում են: Ապացուցեք, որ եթե $\angle BAO = \angle ODC$, $AO = OB$, $CO = OD$, ապա $AC = BD$:

437. ABC եռանկյան BC կողմի վրա վերցված է F կետը: Հայտնի է, որ AF-ը հատում է BD միջնագիծը E կետում, այնպես որ $AE = BC$: Ապացուցեք, որ $BF = EF$:

438. ABC եռանկյան C և A անկյունների տարբերությունը 90° է: Տարված են B ներքին և արտաքին անկյունների կիսորդները, որոնք AC ուղղի հետ հատվում են համապատասխանաբար D և E կետերում: Ապացուցեք, որ $BD = BE$:

439. ABC հավասարակողմ եռանկյան AC կողմի M կետից մյուս երկու կողմերին տարած զուգահեռ ուղիղները AB և BC կողմերը հատում են համապատասխանաբար K և N կետերում: Ապացուցեք, որ $NK \geq \frac{1}{2}AB$:

440. h_a-ն և h_b-ն եռանկյան համապատասխանաբար a և b կողմերին տարված բարձրություններն են: Գտեք եռանկյան անկյունները, եթե $h_a \geq a$, $h_b \geq b$:

441. Եռանկյան մի գագաթից տարված բարձրությունը և միջնագիծը եռանկյան անկյունը բաժանում են երեք հավասար մասի: Գտեք եռանկյան անկյունները:

442. Հավասարասրուն ուղղանկյուն եռանկյունը, որի էջերը 7 սմ են, բաժանեք մի քանի հավասարասրուն ուղղանկյուն եռանկյունների, որոնց մեջ չլինեն հավասար եռանկյուններ:

443. ABC ուղղանկյուն եռանկյան մեջ $\angle B = 30^\circ$ և AB ներքնաձիգին դրա M միջնակետում տարված ուղղահայացը BC էջը հատում է N կետում: Գտեք BC-ն, եթե $MN = 1$ սմ:

444. ABC եռանկյան կիսորդները հատվում են O կետում: BC կողմի վրա վերցված են այնպիսի D և E կետեր, որ $OD \parallel AB$, իսկ $OE \parallel AC$: Գտեք ODE եռանկյան պարագիծը, եթե $BC = 20$ սմ:

445. ABC հավասարակողմ եռանկյան A և C անկյունների կիսորդները հատվում են O կետում: Տարված են AO և CO հատվածների միջնուղղահայացները, որոնք AC կողմը հատում են համապատասխանաբար D և E կետերում: Գտեք AD, DE և EC հատվածների երկարությունները, եթե $AB = 12$ սմ:

446. Տարված է ABC հավասարասրուն $(AB = BC)$ եռանկյան CD կիսորդը: D կետով անցնող և CD-ին ուղղահայաց ուղիղը AC կողմի շարունակությունը հատում է E կետում: Ապացուցեք, որ $EC = 2 \cdot AD$:

447. AB և CD հավասար հատվածները հատվում են K կետում, ընդ որում՝ $AC \parallel BD$: Ապացուցեք, որ AKC և BKD եռանկյունները հավասարասրուն են:

448. Հավասարասրուն եռանկյան հիմքի դիմացի անկյան կիսորդը երկու անգամ փոքր է մյուս կիսորդից: Գտեք եռանկյան անկյունները:

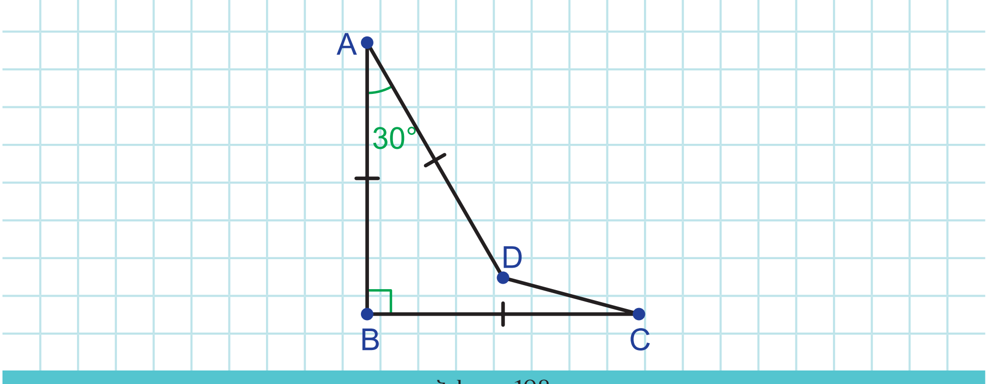
449. ABC հավասարասրուն եռանկյունում $\angle C = 90^\circ$: AB ներքնաձիգի վրա վերցված է D կետն այնպես, որ $\angle DCB = 15^\circ$: Ներքնաձիգին

B կետում տարված ուղղահայաց ուղիղը հատում է CD ճառա-գայթը E կետում: Ապացուցեք, որ $AB = CE$:

450. C ուղիղ անկյունով ABC եռանկյունում $\angle ABC = 75^\circ$: Ապացուցեք, որ $AB < 4 \cdot BC$:

451. ABC և ADC եռանկյունների B և D գագաթները AC ուղղի տարբեր կողմերում են, ընդ որում՝ $AB = BC = a$, $\angle DAB = \angle ADC = \angle DCB$: Ապացուցեք, որ եթե K-ն AD հատվածի կետ է և $DK = a$, ապա CK-ն DCB անկյան կիսորդն է:

452. AB և BC հատվածները հավասար են ու փոխուղղահայաց: D կետն այնպիսին է, որ $AD = DB$, $\angle BAD = 30^\circ$ (նկ. 198): Գտեք անկյուն BCD-ն:



Նկար 198

453. Ապացուցեք, որ եռանկյան կիսորդները հատվում են մի կետում:

454. Եռանկյան գագաթներից մեկը անմատչելի կետում է: Կառուցեք եռանկյան այդ անկյան կիսորդի մատչելի մասում ընկած հատվածը:

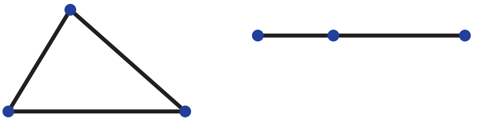
455. Տրված է a ուղիղը և այն հատող AB հատվածը: a ուղղի վրա կա-ռուցեք այնպիսի C կետ, որ a ուղիղը պարունակի ABC եռանկյան կիսորդը:

456. Կառուցեք եռանկյուն՝ ըստ երկու կողմերի և դրանց դիմացի անկյունների տարբերության:

ՊԱՏԱՍԽԱՆՆԵՐ ԵՎ ՑՈՒՑՈՒՄՆԵՐ

ԳԼՈՒԽ I

9. 6:
10. 1 կամ 3:
12. Այդ ուղիղները հատվում են:
13. Ոչ, այդ ուղիղները կարող են համընկնել:
14. ա) 3, բ) 4:
15. 6:
16. Տես նկար 199–ը:



Նկար 199

17. Ոչ:
18. Այո:
19. ա) Այո, քանի որ $AO = OB$, բ) ոչ, քանի որ $AO \neq AB$:
20. ա) $AC < AB$, բ) $CB < AB$:
21. բ) Ցուցում: 2 և 5 բաժանումները 3 սմ երկարությամբ հատվածի ծայրակետեր են:
22. $2a$:
23. $a + b$:
24. 7,5 սմ:
25. 24 սմ:
26. 13 սմ:
27. Ոչ:
28. 14 սմ, 5 սմ:
29. $\frac{a}{2}$:
30. 16 սմ, 12 սմ:
31. 21 դմ:

32. $\frac{3}{8}, \frac{5}{8}$ կամ $\frac{3}{2}, \frac{5}{2}$:
33. $2:3$:
35. 4:
38. Ոչ:
39. 6:
42. ա) Այո, բ) ոչ:
43. ա) $\angle MNP < \angle MNK$:
45. $\frac{1}{36}$:
47. բ) $612'$, գ) $\left(\frac{1}{4}\right)'$:
48. ա) $2,1^\circ$, գ) $37,5^\circ$:
49. $50^\circ 1' 8''$:
51. $26^\circ 48'$, $53^\circ 36'$, $40^\circ 12'$:
52. 47°, 30°:
53. 66°, 89°:
54. 30°, 90°:
55. 20°, 60°, 80°:
56. 36°, 120°, 24°:
57. 34°, 51°, 85°, 85°, 136°:
58. Ոչ:
59. Փռված անկյուն է:
60. $162^\circ 34'$:
61. 105°, 75°:
62. 30°, 150°:
63. 144°:
64. 6:
67. $34^\circ 18'$:
68. Բութ է:
69. Ոչ:
70. ա) Ոչ, բ) այո:
71. ա) 80°, 100°, 80°, 100° բ) 60°, 120°, 60°, 120°:
72. 120°:
73. Ցուցում: Օգտվեք կից անկյունների հատկությունից:
74. Ցուցում: Օգտվեք հակադիր անկյունների հատկությունից և նախորդ խնդրից:

76. Ցուցում: Օգտվեք հակադիր անկյունների հատկությունից:
77. ա) Այո, բ) ոչ, գ) ոչ:
78. ա) Ոչ, բ) այո, գ) ոչ:
79. 10:
80. Ցուցում: Դիտարկեք դրանցից երեքը, ապա չորրորդը և առաջին երեքից երկուսը:
81. Կամ 4, կամ 6, կամ 7:
82. ա) $AC = BD$, բ) $AC = BD$:
83. $\frac{a}{2}$:
84. Եթե D կետը A-ի ու B-ի միջև է, $DB = 4$ սմ, իսկ եթե B կետը A-ի ու D-ի միջև է, $DB = 8$ սմ:
85. 31,5 սմ:
86. $\frac{2}{3}a$:
87. 12 սմ:
88. $\frac{4}{5}m$:
89. 28° կամ 110°:
90. 60°, 120°:
91. 90°:
92. Ցուցում: Գտեք ABC և CBD անկյունների գումարը:

ԳԼՈՒԽ II

94. MNK եռանկյան պարագիծը 8 սմ-ով մեծ է:
95. 11 սմ, 22 սմ, 22 սմ:
96. 15 սմ, 15 սմ, 22 սմ:
97. 12 սմ, 24 սմ, 30 սմ:
98. 56 սմ, 40 սմ, 24 սմ:
99. 65 դմ:
100. $AB = MN$, $BC = NK$, $AC = MK$:
101. $\angle A = \angle M$, $\angle B = \angle N$, $\angle C = \angle K$:
103. $KC = 15$ սմ, $BK = 12$ սմ:
106. Այո:
108. Այո:
109. Այո:

113. 7 սմ:

114. 33°:

115. $\angle DEB, \angle EDA$:

117. Ոչ: Ոչ:

121. Բութանկյուն է:

123. Այո:

124. Ոչ:

125. Ցուցում: Օգտվեք հակադիր անկյունների հատկությունից և եռանկյունների հավասարության II հայտանիշից:

126. Ցուցում: Օգտվեք կից անկյունների հատկությունից և եռանկյունների հավասարության II հայտանիշից:

127. Ցուցում: Օգտվեք նախորդ խնդրից և եռանկյունների հավասարության II հայտանիշից:

128. Ցուցում: Օգտվեք եռանկյունների հավասարության II հայտանիշից:

129. Ցուցում: Նախ, օգտվելով եռանկյունների հավասարության I հայտանիշից, ցույց տվեք, որ $\Delta BFD = \Delta BFE$: Հենվելով դրա վրա և օգտվելով եռանկյունների հավասարության II հայտանիշից՝ ապացուցեք, որ $\Delta ADF = \Delta CEF$:

130. Ցուցում: Նախ ցույց տվեք AOB և DOC, հետո OBE և ODF եռանկյունների հավասարությունը:

135. 14 դմ կամ 6 դմ:

139. 20°, 60°:

143. Ուղիղ անկյուն է:

144. Ցուցում: Օգտվեք հավասար եռանկյունների համապատասխան տարրերի հավասարությունից և եռանկյունների հավասարության I հայտանիշից:

145. Ցուցում: Օգտվեք հավասար եռանկյունների համապատասխան տարրերի հավասարությունից և եռանկյունների հավասարության II հայտանիշից:

146. Ցուցում: Օգտվեք եռանկյունների հավասարության II հայտանիշից:

147. 6 սմ:

148. Ցուցում: Երկու անգամ օգտվեք եռանկյունների հավասարության II հայտանիշից:

149. Ցուցում: Օգտվեք եռանկյունների հավասարության II և I հայտանիշներից:

152. 37 սմ:

153. 11 սմ, 11 սմ, 15 սմ:

155. 20 դմ:
156. 40°:
157. 117°:
158. 11,7 սմ: Ոչ:
159. 1: Ոչ:
160. 11,2 սմ:
161. 52°:
162. 27 սմ:
163. 8,5 սմ:
164. 30 սմ, 30 սմ, 15 սմ:
165. 10 սմ:
166. Ցուցում: Օգտվեք եռանկյունների հավասարության II հայտանիշից:
167. Ցուցում: Օգտվեք եռանկյունների հավասարության I հայտանիշից:
168. Ցուցում: Երկու անգամ օգտվեք հավասարասրուն եռանկյան հատկությունից:
169. Ցուցում: Օգտվեք նախորդ խնդրից և եռանկյան արտաքին անկյան մասին թեորեմից:
171. Ոչ:
174. Այո:
175. Այո:
176. Ցուցում: Օգտվեք եռանկյունների հավասարության III հայտանիշից:
177. 44°:
179. Ցուցում: Օգտվեք եռանկյունների հավասարության III հայտանիշից:
181. Ցուցում: Օգտվեք եռանկյունների հավասարության III հայտանիշից և հավասարասրուն եռանկյան հիմքին տարված կիսորդի հատկությունից:
182. Ցուցում: Օգտվելով եռանկյունների հավասարության I հայտանիշից՝ ցույց տվեք, որ առաջացած եռանկյունների կողմերը համապատասխանաբար հավասար են: Հետո կիրառեք եռանկյունների հավասարության III հայտանիշը:
183. Ցուցում: Օգտվեք եռանկյունների հավասարության III և II հայտանիշներից:
187. Ցուցում: Օգտվեք հակասող ենթադրության մեթոդից և եռանկյան արտաքին անկյան մասին թեորեմից:
190. Ոչ:
191. Հավասարասրուն է:
192. 36°:

193. Հավասարակողմ է:
195. Ոչ:
196. Ոչ:
197. 8,6 սմ:
198. Այո:
199. Ցուցում: Օգտվեք եռանկյունների հավասարության III հայտանիշից:
200. Ցուցում: Օգտվեք հավասարասրուն եռանկյան հիմքին տարված միջնագծի հատկությունից:
201. 29 սմ:
203. Ցուցում: Տե՛ս կետ 28-ի խնդիր 3-ի լուծումը:
205. Ցուցում: Տե՛ս կետ 28-ի խնդիր 1-ի լուծումը:
206. Ցուցում: Տե՛ս կետ 28-ի խնդիր 2-ի լուծումը:
209. Ցուցում: Տե՛ս կետ 28-ի խնդիր 4-ի լուծումը:
210. 4 սմ:
211. 12 սմ, 15 սմ, 20 սմ:
213. Ցուցում: Օգտվեք 168 խնդրից և եռանկյունների հավասարության I հայտանիշից:
214. CD հատվածը:
215. Ոչ: Առաջացած եռանկյունները հավասարասրուն եռանկյուններ են, որոնց սրունքները հավասար են, բայց հիմքերը տարբեր են:
217. Ցուցում: Շարունակեք BM-ը մինչև AC-ի հետ հատվելը և երկու անգամ օգտվեք եռանկյան արտաքին անկյան մասին թեորեմից:
218. Ոչ: Դա հակասում է եռանկյան արտաքին անկյան մասին թեորեմին:
219. Ցուցում: Օգտվեք հակասող ենթադրության մեթոդից և եռանկյան արտաքին անկյան մասին թեորեմից:
220. Ցուցում: Օգտվեք հակասող ենթադրության մեթոդից և եռանկյան արտաքին անկյան մասին թեորեմից:
221. 16 սմ:
222. 50 սմ:
223. Ցուցում: Օգտվեք հավասարասրուն եռանկյան հատկությունից և եռանկյունների հավասարության II հայտանիշից:
224. Ցուցում: Օգտվեք հավասարասրուն եռանկյան հատկությունից և եռանկյունների հավասարության I հայտանիշից:
225. Ցուցում: Օգտվեք հավասարասրուն եռանկյան հատկությունից: Հետո արեք հակասող ենթադրություն և օգտվեք կետ 16-ի հետևանքից:
226. Ցուցում: Օգտվեք հավասարասրուն եռանկյան հատկությունից և հայտանիշից:

227. 40 սմ, 40 սմ, 30 սմ:

228. Ցուցում: Օգտվեք հակադիր անկյունների հատկությունից և եռանկյունների հավասարության I հայտանիշից:

229. Ցուցում: Օգտվեք նախորդ խնդրից և հավասարասրուն եռանկյան հայտանիշից:

230. Ցուցում: Օգտվեք 168 խնդրից և եռանկյունների հավասարության I հայտանիշից:

231. Ցուցում: Օգտվեք նախորդ խնդրից և եռանկյունների հավասարության II հայտանիշից:

232. Ցուցում: Օգտվեք նախորդ երկու խնդիրներից:

233. Ցուցում: Արեք հակասող ենթադրություն և օգտվեք հավասարասրուն եռանկյան հայտանիշից:

234. Օգտվեք կից անկյունների հատկությունից և հավասարասրուն եռանկյան հայտանիշից ու հատկությունից:

235. Ցուցում: Օգտվեք 168 խնդրից և եռանկյունների հավասարության I հայտանիշից:

237. Օրինակ, եթե բնական թիվը վերջանում է 5 թվանշանով, ապա այդ թիվը բաժանվում է 5-ի: Այս պնդման հակադարձ պնդումը սխալ է:

238. Ցուցում: Երկու անգամ օգտվեք հավասարասրուն եռանկյան հատկությունից:

239. Ցուցում: Նախ ապացուցեք, որ AOD և BOC եռանկյունները հավասար են, որտեղ O-ն շրջանագծի կենտրոնն է: Հետո ցույց տվեք, որ DOC անկյունը փռված անկյուն է:

240. Ցուցում: Օգտվելով հատվածի միջնուղղահայացի հատկությունից՝ ցույց տվեք, որ $AC = BD + DC$:

241. բ) Ցուցում: Օգտվեք այս խնդրի ա) կետից, կից անկյունների հատկությունից և եռանկյունների հավասարության II հայտանիշից:
գ) Ցուցում: Օգտվելով այս խնդրի բ) կետից՝ ցույց տվեք, որ OAK և OCK եռանկյունները հավասար են:

242. Ցուցում: Նկատենք, որ $7 \cdot 13^\circ = 91^\circ$:

243. Ցուցում: Նկատենք, որ $2 \cdot 17^\circ = 34^\circ$, իսկ $\frac{90^\circ}{2} = 45^\circ$:

245. Ցուցում: Ցույց տվեք, որ շրջանագծի կենտրոնը պատկանում է և AB, և BC հատվածների միջնուղղահայացներին:

246. Ցուցում: Օգտվեք նախորդ խնդրից:

247. Ցուցում: b հատվածի մի ծայրից դրա վրա տեղադրեք a հատվածին հավասար հատված, կառուցեք ավելացած մասի միջնակետը:

248. Ցուցում: Նկատենք, որ այդպիսի բաժանում անելու համար պետք է եռանկյան կողմերից մեկը բաժանել երկու մասի այնպես, որ դրանց տարբերությունը հավասար լինի մյուս երկու կողմերի տարբերությանը: Դա անելու համար օգտվեք նախորդ խնդրից:

ԳԼՈՒԽ III

251. Այո:

252. Այո:

254. Օրինակ, AB հատողով առաջացած EDA և DAC անկյունները միակողմանի են: BC հատողով առաջացած BED և BCA անկյունները համադիր են: EF հատողով առաջացած DEF և EFC անկյունները խաչադիր են:

256. Այո:

258. Ցուցում: Դիտարկեք այդ ուղիղները AC հատողով հատելիս առաջացած խաչադիր անկյունները:

260. Այո:

262. Ցուցում: Դիտարկեք այդ ուղիղները BC հատողով հատելիս առաջացած համադիր անկյունները:

265. Ցուցում: Դիտարկեք այդ ուղիղները AB հատողով հատելիս առաջացած միակողմանի անկյունները:

267. Ցուցում: Օգտվելով հավասար եռանկյունների համապատասխան անկյունների հավասարությունից՝ ցույց տվեք, որ այդ ուղիղները AC հատողով հատելիս առաջացած խաչադիր անկյունները հավասար են:

268. Ցուցում: Օգտվելով կից անկյունների հատկությունից և եռանկյունների հավասարության I հայտանիշից՝ ցույց տվեք, որ $\angle CMK = \angle MCB$:

269. Ցուցում: Օգտվելով հավասարասրուն եռանկյան և հակադիր անկյունների հատկություններից՝ ցույց տվեք, որ $\angle BAE = \angle AED$:

271. Ցուցում: AC-ի ու BD-ի զուգահեռությունն ապացուցելու համար ցույց տվեք, որ AOC և BOC եռանկյունները հավասար են, որտեղ O-ն շրջանագծի կենտրոնն է: Ապա դիտարկեք AC և BD ուղիղները AB հատողով հատելիս առաջացած խաչադիր անկյունները:

272. Ցուցում: Նախ օգտվելով հատվածի միջնուղղահայացի հատկությունից՝ ցույց տվեք, որ AMK եռանկյունը հավասարասրուն է:

274. Ոչ: Դա կհակասեր զուգահեռ ուղիղների աքսիոմին:

276. Ցուցում: Ցույց տվեք, որ $b \parallel c$, ապա օգտվեք կետ 31-ի հետևանք 2-ից:
277. 107°:
279. 34°:
280. 90°:
281. 90°:
282. 72°:
284. Ցուցում: Օգտվեք զուգահեռ ուղիղները հատողով հատելիս առաջացած համադիր անկյունների հավասարությունից:
286. 60°:
287. 80°, 100°:
288. Ցուցում: Օգտվեք զուգահեռ ուղիղները հատողով հատելիս առաջացած խաչադիր անկյունների հավասարությունից և հավասարասրուն եռանկյան հայտանիշից:
289. Ցուցում: Օգտվեք զուգահեռ ուղիղները հատողով հատելիս առաջացած խաչադիր անկյունների հավասարությունից, ապա հակադիր անկյունների հավասարությունից:
290. Ցուցում: Օգտվեք զուգահեռ ուղիղները հատողով հատելիս առաջացած համադիր անկյունների հավասարությունից և հավասարասրուն եռանկյան հայտանիշից:
291. 25°:
292. Ցուցում: Օգտվեք զուգահեռ ուղիղները հատողով հատելիս առաջացած խաչադիր անկյունների հավասարության, համադիր անկյունների հավասարության մասին թեորեմներից, ապա հավասարասրուն եռանկյան հայտանիշից:
293. Ցուցում: Ապացուցեք, որ $\Delta AOD = \Delta BOC$, ապա, դրանից օգտվելով, ցույց տվեք, որ AD և CB ուղիղները հատողով հատելիս առաջացած խաչադիր անկյունները հավասար են:
294. Ցուցում: O-ն AA'-ի և BB'-ի ընդհանուր միջնակետն է: Ուրեմն, խնդիրը հանգում է նախորդ խնդրին:
295. Ցուցում: Օգտվեք հավասարասրուն եռանկյան հատկությունից, ապա դիտարկեք այդ ուղիղները AD-ով հատելիս առաջացած խաչադիր անկյունները:
296. Ցուցում: Օգտվեք եռանկյունների հավասարության III հայտանիշից:
297. Ցուցում: Օգտվեք նախորդ խնդրից և հավասարասրուն եռանկյան հատկությունից:
298. Ցուցում: Ցույց տվեք, որ $AB = BC$, ապա դիտարկեք BCA և CAF

խաչադիր անկյունները:

299. Ցուցում: Ցույց տվեք, որ $\Delta ABC = \Delta BCD = \Delta CDE$: Այդ հավասարություններից օգտվելով՝ ցույց տվեք, որ $AC \parallel BD$, $CE \parallel BD$: Հետո օգտվեք զուգահեռ ուղիղների աքսիոմից:

300. Ցուցում: Օգտվելով AED եռանկյան հավասարասրունությունից և զուգահեռ ուղիղները հատողով հատելիս առաջացած խաչադիր անկյունների հավասարությունից՝ ցույց տվեք, որ AD-ն ABC հավասարասրուն եռանկյան հիմքին տարված կիսորդն է:

301. Ցուցում: Օգտվելով հավասարասրուն եռանկյան հատկությունից և զուգահեռ ուղիղները հատողով հատելիս առաջացած խաչադիր անկյունների հավասարությունից՝ ցույց տվեք, որ KAD անկյունը հավասար է A գագաթով փռված անկյան կեսին:

302. Ցուցում: C կետով տարեք AB-ին զուգահեռ ուղիղ և օգտվեք զուգահեռ ուղիղները հատողով հատելիս առաջացած խաչադիր անկյունների հավասարությունից:

303. Ցուցում: Օգտվեք նախորդ խնդրից:

304. Ցուցում: C կետով տարեք AB-ին զուգահեռ ուղիղ և օգտվեք զուգահեռ ուղիղները հատողով հատելիս առաջացած միակողմանի անկյունների հատկությունից:

305. 64°:

306. Ցուցում: BD ուղղի վրա D կետից տեղադրեք $DE = BD$ հատվածը: Ցույց տվեք, որ $AE \parallel BC$: Ապա օգտվեք հավասարասրուն եռանկյան հատկությունից և զուգահեռ ուղիղները հատողով հատելիս առաջացած համադիր անկյունների և խաչադիր անկյունների հատկություններից:

308. Ցուցում: Դիտարկեք ABC եռանկյան, օրինակ, C գագաթին հարակից BCD արտաքին անկյունը, տարեք CE-ն զուգահեռ AB-ին: Օգտվեք AB և CE զուգահեռ ուղիղները BC-ով և AC-ով հատելիս առաջացած անկյունների հատկություններից:

ԳԼՈՒԽ IV

312. 86°:

313. Ցուցում: Օգտվեք եռանկյան արտաքին անկյան մասին թեորեմից:

315. 30°, 30°:

316. 20°, 60°, 100°:

317. 30°, 60°, 90°:
318. 90°:
319. Սուրանկյուն եռանկյուն է:
320. Ոչ:
321. Բութանկյուն եռանկյուն է:
322. Այո, օրինակ, $\angle A = 100^{\circ}$:
326. 18°, 72°:
327. 20°, 70°:
328. 8 սմ:
329. 6 սմ:
330. 14 դմ:
331. 8,5 սմ:
332. 30°:
333. 30°:
334. Ցուցում: Օգտվեք հավասարասրուն եռանկյան հատկությունից, եռանկյան անկյունների գումարի մասին թեորեմից և հավասարասրուն եռանկյան հայտանիշից:
335. ա) Ցուցում: Օգտվեք հակասող ենթադրության մեթոդից և եռանկյան անկյունների գումարի մասին թեորեմից:
336. Ցուցում: Օգտվեք 238 խնդրից և եռանկյան անկյունների գումարի մասին թեորեմից:
337. Ցուցում: Օգտվեք նախորդ խնդրից և հավասարասրուն եռանկյան հատկությունից:
338. 140°:
339. 10 սմ:
340. 30 սմ:
341. 16 սմ: Ցուցում: Ցույց տվեք, որ $\angle BCH = 30^{\circ}$:
342. Ցուցում: Օգտվեք ուղղանկյուն եռանկյունների ըստ էջերի հավասարության հայտանիշից:
344. Ցուցում: Օգտվեք ուղղանկյուն եռանկյունների ըստ էջերի հավասարության հայտանիշից:
345. Ցուցում: Օգտվեք ուղղանկյուն եռանկյունների ըստ էջի և դրան կից սուր անկյան հավասարության հայտանիշից:
347. Ցուցում: Օգտվեք ուղղանկյուն եռանկյունների ըստ էջի և դրան կից սուր անկյան հավասարության հայտանիշից:
348. Ցուցում: Օգտվեք ուղղանկյուն եռանկյունների ըստ ներքնաձիգի և սուր անկյան հավասարության հայտանիշից:

349. Ցուցում: Օգտվեք ուղղանկյուն եռանկյունների ըստ ներքնաձիգի և սուր անկյան հավասարության հայտանիշից:

351. Ցուցում: Օգտվեք ուղղանկյուն եռանկյունների ըստ ներքնաձիգի և էջի հավասարության հայտանիշից:

352. Ցուցում: Օգտվեք ուղղանկյուն եռանկյունների ըստ ներքնաձիգի և էջի հավասարության հայտանիշից և հավասարասրուն եռանկյան հայտանիշից:

353. Ցուցում: Օգտվեք զուգահեռ ուղիղները հատողով հատելիս առաջացած խաչադիր անկյունների հավասարությունից և ուղղանկյուն եռանկյունների ըստ էջի և դրա դիմացի անկյան հավասարության հայտանիշից:

354. Ցուցում: Օգտվեք հավասարասրուն եռանկյան հատկություններից և ուղղանկյուն եռանկյունների ըստ ներքնաձիգի և սուր անկյան հավասարության հայտանիշից:

355. Ցուցում: Նախ ցույց տվեք, որ շրջանագծի կենտրոնից դրա լարին տարված ուղղահայացը կիսում է լարը, ապա օգտվեք ուղղանկյուն եռանկյունների ըստ ներքնաձիգի և էջի հավասարության հայտանիշից:

356. Ցուցում: Օգտվեք ուղղանկյուն եռանկյունների ըստ էջի և դրա դիմացի անկյան հավասարության հայտանիշից և եռանկյունների հավասարության I հայտանիշից:

357. Ցուցում: Ցույց տվեք, որ ACC_1 և HBC_1 ուղղանկյուն եռանկյունները հավասար են:

358. $45°$: Ցուցում: Օգտվեք նախորդ խնդրից:

359. $\angle B, \angle A, \angle C$:

360. BC, AB, AC:

361. Ոչ:

362. Ոչ:

365. Ցուցում: ABK և AKC ուղղանկյուն եռանկյունների համար օգտվեք կետ 36-ի հետևանք 1-ից:

366. Ցուցում: Օգտվեք կետ 36-ի հետևանք 1-ից:

370. Ոչ:

371. Ոչ:

372. Յամ:

373. Ցուցում: Օգտվեք հավասարասրուն եռանկյան հայտանիշից և եռանկյան անհավասարությունից:

374. Ցուցում: Այդ կետը միացրեք եռանկյան գագաթներին և առաջացած եռանկյունների համար գրեք եռանկյան անհավասարությունը:

375. Ցուցում: Ենթադրենք՝ ABC եռանկյունում տարված է BD միջնագիծը: BD ուղղի վրա D կետից տեղադրեք $DE = BD$ հատվածը և ABE եռանկյան համար գրեք եռանկյան անհավասարությունը:

376. Ցուցում: Օգտվելով նրանից, որ եռանկյան ավելի մեծ կողմի դիմացի անկյունը ավելի մեծ է՝ ցույց տվեք, որ $\angle A > \angle B + \angle C$:

377. Ցուցում: Օգտվելով եռանկյան անհավասարությունից՝ ցույց տվեք, որ եթե լարը տրամագիծ չէ, ապա դրա երկարությունը փոքր է 2R-ից, որտեղ R-ը շրջանագծի շառավիղն է:

379. 9 սմ:

380. Հավասարասրուն է:

381. 5սմ, 5սմ:

382. 28°:

384. 25°:

385. $AB > DC$:

387. 90°:

388. 5սմ:

389. Ցուցում: Օգտվեք 386 խնդրից և հավասարասրուն եռանկյան հատկությունից:

393. Օրինակ, ABC հավասարակողմ եռանկյան AB և BC կողմերից կազմված բեկյալը:

396. Առաջինը տեղ հասավ դեղին, երկրորդը՝ կանաչ և երրորդը՝ կապույտ ճանապարհով գնացողը:

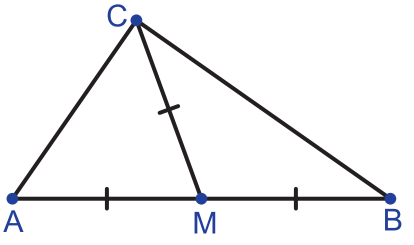
397. Ցուցում: Անկյան գագաթից քանոնը տեղադրեք այնպես, որ զուգահեռ կողմերից մեկն ընկած լինի անկյան կողմերից մեկի վրա, իսկ մյուսը հատի անկյան մյուս կողմը: Այդ կողմով գծեք հատված: Նույնն արեք անկյան մյուս կողմի նկատմամբ: Գծված հատվածների հատման կետը միացրեք անկյան գագաթին:

398. Ցուցում: Քանոնը տեղադրեք այնպես, որ տրված կետերը գտնվեն քանոնի զուգահեռ կողմերի վրա և քանոնի կողմերով գծեք հատվածներ: Հաշվի առեք, որ կարելի է տանել զուգահեռ հատվածների երկու զույգ:

399. Ցուցում: Օգտվեք նախորդ խնդրից:

400. Ցուցում: Օգտվեք 398 խնդրից:

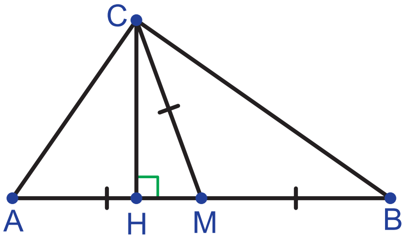
402. Ցուցում: Ենթադրենք՝ ABC ուղղանկյուն եռանկյունը խնդրի պայմաններին բավարարող եռանկյունն է. CM-ը տրված միջնագիծն է, AC-ն՝ տրված էջը (նկ. 200):



Նկար 200

Այդ դեպքում $AB = 2 \cdot CM$: Բացի այդ, C գագաթը M կենտրոնով ու CM շառավղով շրջանագծի վրա է: Մյուս կողմից, C գագաթը A կենտրոնով ու AC շառավղով շրջանագծի վրա է:

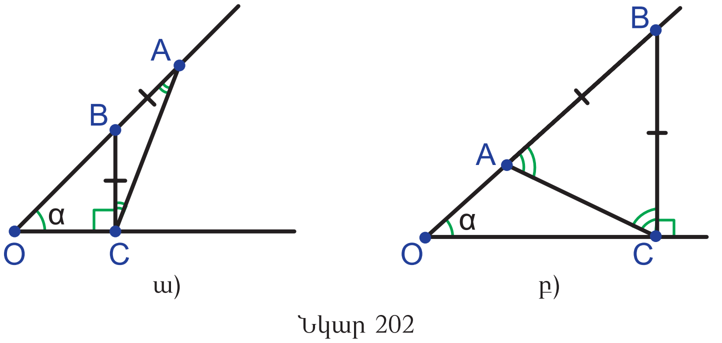
403. Ցուցում: Ենթադրենք՝ ABC ուղղանկյուն եռանկյունը խնդրի պայմաններին բավարարող եռանկյունն է. AB–ն տրված ներքնաձիգն է, CH–ը տրված բարձրությունը (նկ. 201):



Նկար 201

Այդ դեպքում $CM = \frac{AB}{2}$: Հետևաբար, C գագաթը M կենտրոնով ու AB տրամագծով շրջանագծի վրա է: Մյուս կողմից, C գագաթը AB-ին զուգահեռ և դրանից CH–ով հեռացված ուղղի վրա է:

404. Ցուցում: Ենթադրենք՝ փնտրվող կետը՝ B–ն կառուցված է (նկ. 202):



Նկար 202

Դիտարկեք երկու դեպք՝ 1) B–ն պատկանում է OA հատվածին (նկ. 202 ա), 2) A–ն պատկանում է OB հատվածին (նկ. 202 բ):

1) դեպքում $\angle OAC = \dfrac{\angle OBC}{2}$, իսկ $\angle OBC = 90^\circ - \alpha$: Ուրեմն, $\angle OAC = \dfrac{90^\circ - \alpha}{2}$: 2) դեպքում նորից $\angle OBC = 90^\circ - \alpha$, իսկ $\angle BAC = \dfrac{180^\circ - \angle OBC}{2} = \dfrac{90^\circ + \alpha}{2}$:

405. $\angle A = 50^\circ$, $\angle B = 110^\circ$, $\angle C = 20^\circ$:

406. 65°, 85°:

407. 360°:

408. Սուրանկյուն եռանկյուն է:

410. 36°:

411. $90^\circ + \dfrac{\alpha}{2}$:

412. Ցուցում: Ուղիղ անկյան գագաթից տարված կիսորդով ու միջնագծով, կիսորդով ու բարձրությամբ կազմված անկյունները արտահայտեք ուղղանկյուն եռանկյան սուր անկյուններով, ապա օգտվեք ուղղանկյուն եռանկյան սուր անկյունների գումարի մասին թեորեմից:

413. Ցուցում: Ենթադրելով, որ եռանկյունն ունի երկու փոխուղղահայաց կիսորդ՝ գտեք այն անկյունների գումարը, որոնց կիսորդները փոխուղղահայաց են:

414. Ցուցում: Օգտվեք նրանից, որ եթե եռանկյան կիսորդն ու միջնագիծը համընկնում են, ապա դա նաև բարձրություն է: Ապա օգտվեք նախորդ խնդրից:

415. Ցուցում: Օգտվեք նրանից, որ հավասարակողմ եռանկյան միջնագծերը նաև կիսորդներ ու բարձրություններ են, իսկ անկյունները 60° են: Հետո օգտվեք ուղղանկյուն եռանկյան 30°–ի դիմացի էջի հատկությունից:

416. 4 սմ, 12 սմ:

417. 32 սմ:

418. Ցուցում: Գտեք բարձրությամբ ու փոքր էջով կազմված անկյունը: Հետո, օգտվելով ուղղանկյուն եռանկյան ներքնաձիգին տարված միջնագծի հատկությունից, գտեք այդ միջնագծով ու մեծ էջով կազմված անկյունը:

419. Ցուցում: AMK եռանկյան համար կիրառեք ուղղանկյուն եռանկյան

30°-ի դիմացի էջի հատկությունը: Հետո, օգտվելով ուղղանկյուն եռանկյան ներքնաձիգին տարված միջնագծի հատկությունից և արտաքին անկյան մասին թեորեմից, ցույց տվեք, որ $MK = KC$:

420. 12 սմ: Ցուցում: Նախ ցույց տվեք, որ ներքնաձիգին տարված միջնագիծը 6 սմ է:

421. Ցուցում: D կետից AB և BE ուղիղներին տարեք համապատասխանաբար DK և DP ուղղահայացները: Ցույց տվեք, որ BD-ն KBP անկյան կիսորդն է:

422. Ցուցում: Օգտվելով նախորդ խնդրից ու D-ի A անկյան կիսորդի կետ լինելուց՝ ցույց տվեք, որ D-ն հավասարահեռ է BE և EC ուղիղներից:

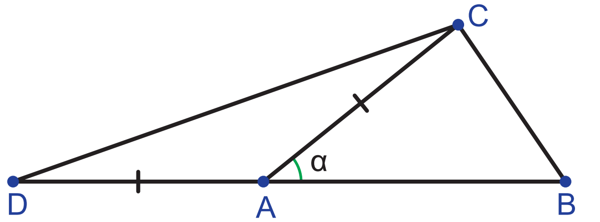
423. Ցուցում: Այնպես, ինչպես նախորդ խնդրում ցույց տրվեց, որ ED-ն BEC անկյան կիսորդն է, ցույց տվեք, որ EF-ը BEA անկյան կիսորդն է:

424. Ցուցում: Նախ ցույց տվեք, որ $BD = DK$, որտեղ K-ն DM և AB ուղիղների հատման կետն է: Հետո ցույց տվեք, որ $DK = DM$:

425. ա) Այո, բ) ոչ, գ) ոչ:

426. Ցուցում: Օգտվելով նրանից, որ եռանկյան ավելի մեծ կողմի դիմացի անկյունը ավելի մեծ է՝ ցույց տվեք, որ $\angle B + \angle C > \angle A$:

427. Ցուցում: Ենթադրենք՝ ABC եռանկյունը խնդրի պայմաններին բավարարող եռանկյունն է. BC-ն հավասար է տրված կողմին, $\angle A$-ն հավասար է տրված անկյանը, $AB + AC = d$, որտեղ d-ն մյուս երկու կողմերի տրված գումարն է (նկ. 203):

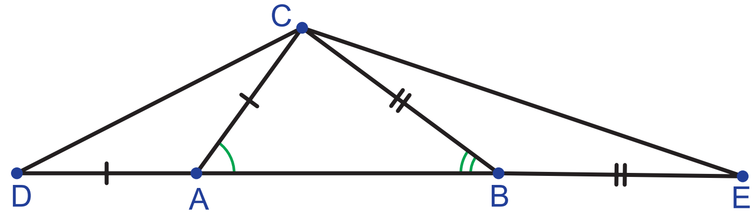


Նկար 203

BA ճառագայթի վրա՝ A կետից տեղադրենք AC-ին հավասար AD հատվածը: Այդ դեպքում $\angle CDA = \dfrac{\angle A}{2}$, $DB = AB + AC$: Հետևաբար, կառուցումը կարելի է սկսել DBC եռանկյունից:

Կառուցեք d հատվածին հավասար DB հատված, ապա DB ճառագայթի վրա D կետից տեղադրեք $\dfrac{\angle A}{2}$-ին հավասար անկյուն: Կառուցեք B կենտրոնով և տրված կողմին հավասար շառավղով շրջանագիծ: Շրջանագծի ու կառուցված անկյան՝ DB–ի հետ չհամընկնող կողմի ընդհանուր կետը (հնարավոր է լինեն երկուսը կամ ընդհանուր կետ չունենան) կլինի որոնելի C գագաթը: Իսկ A կետը ստանալու համար, տարեք DC–ի միջնուղղահայացը:

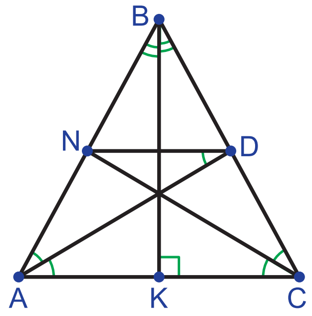
428. Ցուցում: Ենթադրենք՝ ABC եռանկյունը խնդրի պայմաններին բավարարող եռանկյունն է. եռանկյան պարագիծը հավասար է տրված հատվածին, $\angle A$–ն և $\angle B$–ն համապատասխանաբար հավասար են տրված անկյուններին (նկ. 204):



Նկար 204

BA ուղղի վրա՝ A կետից տեղադրենք AC–ին հավասար AD, իսկ B կետից՝ BC–ին հավասար BE հատվածները (տես նկ. 204): Այդ դեպքում $\angle CDA = \dfrac{\angle A}{2}$, $\angle CEB = \dfrac{\angle B}{2}$, $DE = P_{ABC}$:
Հետևաբար, կառուցումը կարելի է սկսել DEC եռանկյունուց՝ ըստ կողմի և դրան առընթեր երկու անկյան: Հետո, A և B կետերը ստանալու համար, տարեք DC–ի ու CE–ի միջնուղղահայացները:

429. Ցուցում: Ենթադրենք՝ ABC–ն վերականգնված եռանկյունն է. AC–ն դրա հիմքն է, AD–ն, BK–ն և CN–ը՝ կիսորդները (նկ. 205):



Նկար 205

Այդ դեպքում $ND \parallel AC$, $ND = AN$, իսկ BK ուղիղը AC հատվածի միջնուղղահայացն է:

430. Ցուցում: AM միջնագծի շարունակության վրա տեղադրեք $MD = AM$ հատվածը, իսկ A_1M_1 միջնագծի շարունակության վրա՝ $M_1D_1 = A_1M_1$ հատվածը:

431. Ցուցում: K կետով տարեք AC-ին զուգահեռ ուղիղ և AB-ի հետ հատման կետը նշանակեք P-ով: Ցույց տվեք, որ $AP = KP$, իսկ հետո՝ որ $\Delta BKP = \Delta ACK$:

432. 2 սմ: Ցուցում: BC կողմի վրա տեղադրեք $BM = AB$ հատվածը: Ցույց տվեք, որ $MC = AM = AK$:

433. 15°, 75°: Ցուցում: Օգտվեք ուղղանկյուն եռանկյան ներքնաձիգին տարված միջնագծի հատկությունից:

434. 135°: Ցուցում: Եռանկյան ներսում վերցրեք ևս մի կետ՝ N, այնպես որ $\angle NBC = \angle NCB = 15^o$: Ցույց տվեք, որ $BM = NB = MN = NC$:

435. Ցուցում: Տարեք BAD եռանկյան AF միջնագիծը, ապա օգտվեք ուղղանկյուն եռանկյան ներքնաձիգին տարված միջնագծի հատկությունից:

436. Ցուցում: Նախ ցույց տվեք, որ $\angle BAO = \angle ABO = \angle OCD = \angle ODC$: Հետո ցույց տվեք, որ $\Delta AOC = \Delta BOD$:

437. Ցուցում: BD-ի շարունակության վրա տեղադրեք $DM = BD$ հատվածը: Նախ ցույց տվեք, որ AME եռանկյունը հավասարասրուն է, ապա, որ հավասարասրուն է BFE եռանկյունը:

438. Ցուցում: Ցույց տվեք, որ $\angle EBD = 90^o$, իսկ $\angle BDE = 45^o$:

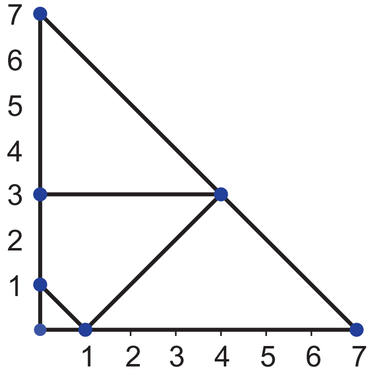
439. Ցուցում: K և N կետերից տարեք ուղղահայացներ AC-ին: Դիտարկեք երկու դեպք՝ KN-ը զուգահեռ է AC-ին և KN-ը զուգահեռ չէ AC-ին:

440. 45°, 45°, 90°: Ցուցում: Ցույց տվեք, որ $a \le h_a \le b \le h_b \le a$:

441. 30°, 60°, 90°:

443. 3սմ:

442. Բաժանման առաջին քայլերը ներկայացված են նկար 206-ում:



Նկար 206

444. 20 սմ:

445. 4 սմ: Ցուցում: Ցույց տվեք, որ DOE եռանկյունը հավասարակողմ է:

446. Ցուցում: D կետը միացրեք CE-ի M միջնակետին և ցույց տվեք, որ $AD = DM$:

447. Ցուցում: Արեք հակառող ենթադրություն և օգտվեք կետ 36-ի թեո-րեմից:

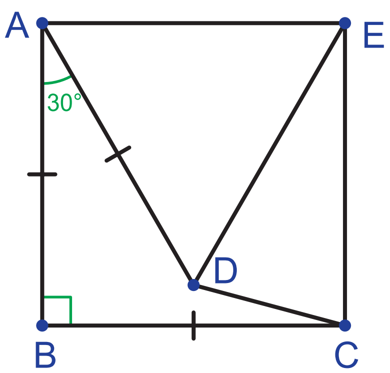
448. 36°, 36°, 108°: Ցուցում: Ենթադրենք՝ այդ եռանկյունը BC հիմքով ABC եռանկյունն է: AM միջնագծի շարունակության վրա տեղադրենք $MP = AM$ հատվածը: Օգտվեք նախորդ խնդրից:

449. Ցուցում: Տարեք ABC եռանկյան CH բարձրությունը, որը կլինի նաև միջնագիծ: Ցույց տվեք, որ CHD և EBD ուղղանկյուն եռանկյուններում կա 30°-ի անկյուն, ապա օգտվեք ուղղանկյուն եռանկյան 30°-ի դիմացի էջի հատկությունից:

450. Ցուցում: AC էջի վրա վերցրեք D կետն այնպես, որ $\angle DBA = 15^{o}$: Օգտվեք հավասարասրուն եռանկյան հայտանիշից, ապա ուղղանկյուն եռանկյան 30°-ի դիմացի էջի հատկությունից DCB եռանկյան համար: Մնում է կիրառեք եռանկյան անհավասարությունը ADB եռանկյան համար:

451. Ցուցում: Նախ, օգտվելով $AB = BC$, $\angle DAB = \angle DCB$ պայմաններից, ցույց տվեք, որ $AD = DC$: Ապա ցույց տվեք, որ $\angle ADB = \angle BDC$: Հաշվի առնելով, որ $\angle ADC = \angle DCB$, կմնա ցույց տալ, որ $\angle KCD = \angle BDC$:

452. 15°: Ցուցում: Դիտարկեք ABCE քառակուսին (նկ. 207): Ցույց տվեք, որ ADE եռանկյունը հավասարակողմ է, իսկ EDC եռանկյունը՝ հա-վասարասրուն:



Նկար 207

453. Ցուցում: Նկատենք, որ եռանկյան երկու կիսորդների հատման կետը հավասարահեռ է եռանկյան բոլոր կողմերից:

454. Ցուցում: Օգտվելով նախորդ խնդրից՝ կառուցեք անմատչելի կետում գագաթ ունեցող անկյան կիսորդի երկու կետ:

455. Ցուցում: Նկատենք, որ եթե AB հատվածն ուղղահայաց է a ուղիղին, ապա կամ խնդիրը լուծում չունի, կամ a ուղղի ցանկացած կետ բավարարում է խնդրի պայմանին: Մնացած դեպքերի համար A կետից տարեք a ուղղին ուղղահայաց և նույնքան շարունակեք: Ստացված կետով և B կետով տարեք ուղիղ:

456. Ցուցում: Ենթադրենք՝ ABC-ն որոնելի եռանկյունն է. BC և AC կողմերը հավասար են տրված հատվածներին, A և B անկյունների տարբերությունը հավասար է տրված անկյանը:
Ենթադրենք AB հատվածի միջնուղղահայացը BC կողմը հատում է D կետում, իսկ C կետից այդ միջնուղղահայացին տարված ուղղահայացն ու AD ուղիղը հատվում են E կետում: Ցույց տվեք, որ $AE = BC,\ \angle EAC = \angle A - \angle B$:

ԱՌԱՐԿԱՅԱՑԱՆԿ

ԼՐԱՑՈՒՑԻՉ ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

1. Шень А. Геометрия в задачах. – М.: МЦНМО, 2013.
2. Парахневич, В.А.; Парахневич, Е.В. Сборник задач по геометрии. VIII –X классы. – Мн.: Нар. Асвета, 1972.
3. Гордин Р. К. Геометрия. Планиметрия. 7–9 классы. – М.: МЦНМО, 2006.
4. Прасолов В. В. Задачи по планиметрии. – М.: МЦНМО: 2006.
5. Делоне Б. Н. Задачник по геометрии. – М.; Л; ГНТТЛ: 1950.
6. Перельман Я.И. Веселые задачи. – М.: АСТ. 2003.
7. Александров И.И. Сборник геометрических задач на построение. – М.: МЦНМО: 2010.
8. Кукарцева Г.И. Сборник задач по геометрии в рисунках и тестах. – М.: Аквариум: 1999.
9. Աղեկյան Գ.Վ. Երկրաչափության խնդրագիրք ցուցումներով: – Եր.: Էդիտ Պրինտ: 2021:
10. Աղեկյան Գ.Վ. GeoGebra-Դինամիկ մաթեմատիկա բոլորի համար: Եր.: Անտարես: 2012:
11. https://www.problems.ru
12. https://zadachi.mccme.ru

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

ԳԼՈՒԽ II. ԵՌԱՆԿՅՈՒՆ: ԵՐԿՐԱՉԱՓԱԿԱՆ ԿԱՌՈՒՑՈՒՄՆԵՐ

ԳԼՈՒԽ III. ԶՈՒԳԱՀԵՌ ՈՒՂԻՂՆԵՐ

ԳԼՈՒԽ IV. ԱՌՆՉՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ ԵՌԱՆԿՅԱՆ ԿՈՂՄԵՐԻ ԵՎ ԱՆԿՅՈՒՆՆԵՐԻ ՄԻՋԵՎ

Գագիկ Աղեկյան

Երաշխավորված է ՀՀ կրթության, գիտության,
մշակույթի և սպորտի նախարարության կողմից

ԵՐԿՐԱՉԱՓՈՒԹՅՈՒՆ 7

Գրքի ձևավորման համար օգտագործվել են
Վասիլի Կանդինսկու որոշ նկարներ:

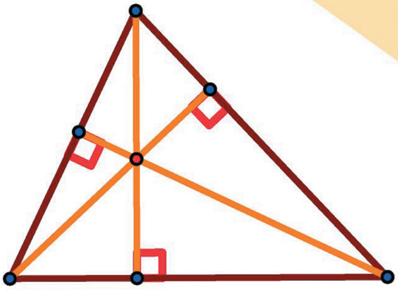
Հրատարակչության խմբագիր՝ Մարգարիտ Արիստակեսյան

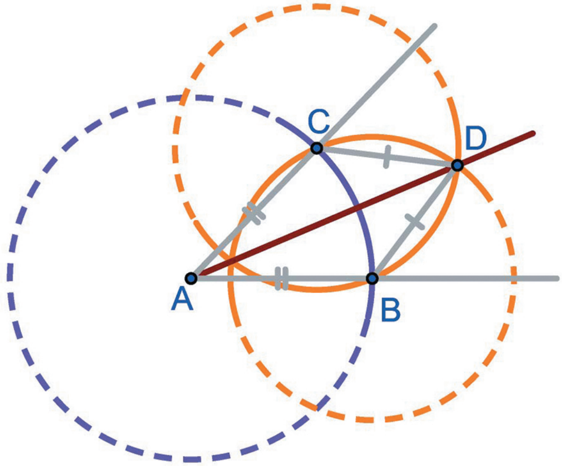
Համակարգչային ձևավորումը՝ Հեղինե Փիլոյանի

Կազմի ձևավորումը՝ Հայկազ Օհանյանի

ԷԴԻԹ ՊՐԻՆՏ
Երևան, Դ. Մալյան 43
հեռ.՝ (374 10) 520 848
www.editprint.am
info@editprint.am

Չափսը՝ 100x70 1/16, թուղթը՝ օֆսեթ:
Ծավալը՝ 11 մամուլ:
Տպաքանակը




C
D
A
B